МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ, НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ
И РЫБОХОЗЯЙСТВЕННОГО КОМПЛЕКСА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО Донской ГАУ)

АЗОВО-ЧЕРНОМОРСКИЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ – ФИЛИАЛ
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» В Г. ЗЕРНОГРАДЕ
(Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ)

Математика в SMathStudio

Учебное пособие

Рекомендуется Федеральным УМО в системе высшего образования
по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки
35.00.00 – Сельское, лесное и рыбное хозяйство
в качестве учебного пособия при подготовке бакалавров
по направлению «Агроинженерия»

Зерноград – 2022

УДК 517 (075)
М 33

*Печатается по решению методического совета
Азово-Черноморского инженерного института – филиала
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Донской государственный аграрный университет»
в г. Зернограде*

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Прикладная математика» ФГОБОУ ВО «ЮРГПУ (НПИ) им. М.И. Платова» ***Пасенчук А.Э.,***

и.о. директора ФГБНУ «АНЦ «ДОНСКОЙ»», доктор технических наук, профессор ***Пахомов В.И.***

М 33 Математика в SMathStudio: учебное пособие / Н.М. Удинцова, М.Н. Середина, В.В. Серёгина, Д.В. Степовой. – Зерноград: Азово-Черноморский инженерный институт ФГБОУ ВО Донской ГАУ, 2022. – 191 с.

ISBN 978-5-91833-208-5

В учебное пособие включены основные разделы курса «Математика»: элементы математического анализа, векторная алгебра и аналитическая геометрия, теория вероятностей и математическая статистика, элементы комплексного анализа.

Учебное пособие реализовано в виде 8 лабораторных работ, расчётная часть которых выполняется в среде SMathStudio.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 – Агроинженерия, 13.03.01 – Теплоэнергетика и теплотехника, 13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника, 20.03.01 – Техносферная безопасность, 19.03.02 – Продукты питания из растительного сырья, 21.03.02 – Землеустройство и кадастры, 23.03.01 – Технология транспортных процессов.

ISBN 978-5-91833-208-5 УДК 517 (075)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В современном сельскохозяйственном производстве присутствует широкий спектр технологических процессов, требующих от выпускников вузов компетентного владения математическим аппаратом.

Умения и навыки, приобретаемые студентами при выполнении лабораторных работ в SmathStudio, позволят им в дальнейшем качественно решать типовые задачи профессиональной деятельности на основе знаний основных математических законов с применением информационных технологий.

Представленные лабораторные работы направлены на формирование навыков построения графиков функции, что является необходимым условием при изучении однофазных и трехфазных систем переменного синусоидального тока, получивших широкое распространение для электроснабжения потребителей АПК, а также поможет при изучении раздела «Кинематика материальной точки» для построения траектории движения точки по заданным уравнениям движения. В том числе, они позволят освоить действия над матрицами, а также получить навыки по решению систем линейных алгебраических уравнений, что необходимо при расчете параметров электрических цепей постоянного и переменного тока для анализа режимов работы сельскохозяйственных потребителей. Кроме того, лабораторные работы в SMathStudio формируют одно из важнейших умений по выполнению операций над векторами и комплексными числами, которое необходимо для проведения расчетов параметров и режимов систем переменного тока, обеспечивающих электроснабжение потребителей АПК. Также представленные лабораторные работы направлены на получение знаний и умений находить производную и интеграл функции, которые необходимы при расчете переходных режимов в электрических цепях, возникающих в процессе коммутации или аварийных режимов и требующих информации о параметрах основных электрических величин для правильного выбора электрооборудования и элементов электрической сети, осуществляющих электроснабжение потребителей АПК. Навыки, полученные при выполнении лабораторных работ в SMathStudio, также помогут при решении задач по определению кинематических характеристик движения точки и задач раздела «Динамика материальной точки», что в свою очередь необходимо при описании технологических процессов сельскохозяйственного производства.

Настоящее пособие предназначено для проведения лабораторных занятий по высшей математике для студентов, обучающихся по направлениям подготовки: 35.03.06 – Агроинженерия, 13.03.01 – Теплоэнергетика и теплотехника, 13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника, 20.03.01 – Техносферная безопасность, 19.03.02 – Продукты питания из растительного сырья, 21.03.02 – Землеустройство и кадастры, 23.03.01 – Технология транспортных процессов.

Лабораторные занятия являются обязательной частью учебного процесса, который в соответствии с требованиями ФГОС ВО подготовки бакалавров должен проводиться в активной или интерактивной форме с использованием компьютерных технологий.

Учебное пособие разработано с целью обучения студентов приемам и методам решения математических задач с использованием прикладной программы SMathStudio.

Предполагается, что студент прослушал теоретический курс высшей математики: линейную и векторную алгебру, аналитическую геометрию, анализ функции одной переменной, элементы теории функций комплексной переменной, дифференциальные уравнения и ряды, основы теории вероятностей и математической статистики и знаком с основными объектами изучения каждого раздела, их свойствами и обозначениями.

Пособие состоит из 8 лабораторных работ, которые рассматривают различные задачи из практически всех перечисленных разделов высшей математики. Предварительно приводится справочный теоретический материал, который затем применяется при численных расчетах конкретных примеров, выполняемых в среде SMathStudio. Значительное место при этом уделяется различным формам представления как входной, так и выходной информации в виде массивов, графиков, таблиц. При решении каждой из поставленных в лабораторных работах задач поэтапно демонстрируются скриншоты экрана, что делает процесс применения SMathStudio весьма наглядным.

Учебное пособие направлено на формирование следующих компетенций, предусмотренных федеральными государственными стандартами высшего образования соответствующих направлений подготовки:

– способности решать типовые задачи профессиональной деятельности на основе знаний основных законов математических и естественных наук с применением информационно-коммуникационных технологий;

– способности применять соответствующий физико-математический аппарат, методы анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при решении профессиональных задач;

– способности учитывать современные тенденции развития техники и технологий в области техносферной безопасности, измерительной и вычислительной техники, информационных технологий при решении типовых задач в области профессиональной деятельности, связанной с защитой окружающей среды и обеспечением безопасности человека;

– способности осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач;

– способности применять основные законы и методы исследований естественных наук для решения задач профессиональной деятельности;

– способности решать задачи профессиональной деятельности, применяя методы моделирования, математического анализа, естественнонаучные и общеинженерные знания;

– способности применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О РАБОТЕ В SMATHSTUDIO

Приведём некоторые общие приёмы работы с документами (создание, сохранение, правка), которые будут полезны при выполнении заданий.

1. Назначение SMathStudio

SMathStudio – один из самых популярных и удобных редакторов для решения математических, инженерных и экономических задач.

SMathStudio ориентирован на студентов и инженеров – непрофессионалов в области математики, которым нужно провести математические расчеты. В нём большая часть математических объектов отображается на экране так же, как принято в курсе математики.

Для решения математической задачи в SMathStudio достаточно ввести соответствующее математическое выражение, применяя встроенный редактор формул, и сразу же получить результат.

С помощью SMathStudio можно:

- выполнять расчёты по формулам в численном виде, используя пакет как инженерный калькулятор;
- решать задачи линейной алгебры;
- строить графики функций;
- решать задачи математического анализа (дифференцировать и интегрировать);
- решать задачи теории вероятностей и математической статистики.

2. Рабочее окно SMathStudio

2.1. Главное меню

При запуске программы SMathStudio на экране появляется рабочее окно SMathStudio с главным меню. Кроме этого в зависимости от настроек на экране могут отображаться панели бокового меню (панели инструментов) – Арифметика, Матрицы, Функции, График, Программирование, Символы, которые нами будут рассмотрены позднее в ходе лабораторных работ.

Главное меню SMathStudio занимает верхнюю строку рабочего окна. Все необходимые действия можно выполнять, следуя пунктам этого меню и последовательно открывающихся окон.

2.2. Панели инструментов

Панели инструментов (боковое меню) служат для быстрого выполнения наиболее часто применяемых команд.

Рассмотрим назначение основных панелей:

− **Арифметика** – служит для вставки математических символов и операторов в документы и содержит: цифры от 1 до 9, символ бесконечности ∞, число π, знак факториала !, операторы сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня, оператор присвоения и др.

− **Матрицы** – служит для выполнения действий с векторами и матрицами, а также для создания ранжированных переменных.

− **Функции** – содержит некоторые функции, такие как логарифм, синус, косинус, тангенс, котангенс; операторы дифференцирования и интегрирования и др.

− **График** – содержит кнопки, позволяющие вращать, масштабировать, перемещать графики.

− **Символы** – позволяет набирать греческие символы α, β, γ и так далее.

3. Создание нового документа

При запуске SMathStudio автоматически создаётся файл Расчёт 1, представляющий собой шаблон рабочего документа SMathStudio. При необходимости создать ещё один новый документ, находясь непосредственно в среде пакета SMathStudio, нужно выполнить одно из следующих действий:

– Выбрать команду Главного меню **Файл → Создать расчёт**.

– «Щёлкнуть» указателем мыши на кнопке  на Стандартной панели инструментов.

– Нажать комбинацию клавиш **Ctrl+N**.

Любая из этих комбинаций приведёт к созданию пустого документа в окне SMathStudio. Каждый новый документ выводится с условным названием Расчёт (Расчёт 2, Расчёт 3 и так далее).

При этом новый документ автоматически создается по готовому шаблону. Но это не обязательно. В SMathStudio при создании документа можно задать его стиль самостоятельно.

Находясь внутри пакета SMathStudio, при необходимости, перейти из одного созданного или открытого документа в другой можно с помощью Главного меню. Для этого нужно выбрать команду **Листы**, а затем в открывшемся подменю выбрать нужный документ.

4. Открытие существующего документа

Если Вы находитесь в пакете SMathStudio, то открытие существующего документа можно провести одним из следующих способов:

– Выполнить команду **Файл→Открыть** в Главном меню.

– Выбрать кнопку  на Стандартной панели инструментов.

– Нажать комбинацию клавиш **Ctrl+O**.

5. Сохранение документа

Для сохранения документа в SMathStudio нужно выполнить одно из действий:

Выполнить команду Главного меню **Файл→Сохранить** (если нужно сохранить со старым именем на том же месте) **или Сохранить как** (если нужно сохранить с новым именем или в новом месте).

− Выбрать кнопку  на Стандартной панели инструментов.

− Нажать комбинацию клавиш **Ctrl+S**.

Если документ сохраняется впервые, то в этом случае будет выведено диалоговое окно **Сохранение как**, в котором Вам будет предложено выбрать название файла, его расположение и тип.

6. Закрытие документа

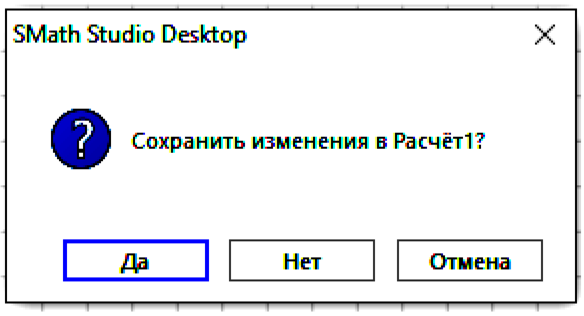
В SMathStudio существует несколько способов закрытия документа:

− Выбрать в главном меню команду **Файл→Выход**.

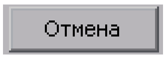
− Нажать комбинацию клавиш **Alt+F4**.

− Закрыть окно документа, нажав на значок × в верхнем правом углу окна.

Если файл не был сохранён, но в нём производились изменения, то появится окно (рисунок):



Окно, появляющееся при закрытии несохраненного документа

При выборе кнопки  появится диалоговое окно **Сохранить как**, в котором можно сохранить файл и выйти. При выборе кнопки  Вы завершите работу с программой без сохранения. Кнопка  отменяет завершение работы с файлом.

7. Правка документа

Перед началом работы на экране курсор имеет вид крестика. В момент ввода выражения курсор приобретает вид уголка, охватывающего один или несколько символов.

7.1. Выделение фрагмента

Выделить фрагмент документа можно одним из трёх способов:

– Для выделения уголком курсора одного символа надо установить уголок курсора так, чтобы он охватывал нужный символ слева или справа. Для расширения выделения на часть выражения или всё выражение уголком следует использовать клавиши со стрелками или клавишу пробела. Уголок курсора должен охватывать всё выражение или только ту его часть, над которой надо выполнить какие-либо действия.

– Для выделения части выражения или всего выражения надо «щёлкнуть» мышью в начале или в конце выделяемой части выражения и переместить курсор до другого края выделяемого выражения, не отпуская левую кнопку мыши.

− Можно использовать и сочетание клавиш **Shift + ⟶** или **Shift + ⟵** (здесь символ + означает **одновременное** нажатие клавиш **Shift** и ⟶ или **Shift** и ⟵). В этом случае выделенная часть выражения имеет синий фон.

− Для выделения объекта или группы объектов (математических, текстовых или графических) надо «щёлкнуть» мышью в свободном месте рабочего документа и растянуть пунктирный прямоугольник выделения так, чтобы он охватил нужные Вам объекты. Один объект при этом будет выделен уголком курсора, а группа объектов обведена пунктирной рамкой.

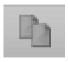
7.2. Удаление, копирование и перемещение части документа

Выполнить операции удаления, копирования и перемещения части документа в SMathStudio можно, пользуясь Стандартной панелью инструментов, клавишами клавиатуры или мышью.

Если надо удалить, вырезать или скопировать в буфер обмена выделенную указанным выше образом часть выражения, выделенный объект целиком или группу выделенных объектов, выполните следующие действия:

− Для безвозвратного удаления нажмите клавишу **Delete** или **Backspace**.

− Для вырезания в буфер обмена нажмите кнопку  – **Вырезать** на Стандартной панели инструментов SMathStudio. При нажатии кнопки объект удаляется из рабочего документа, но переносится в буфер.

− Для копирования в буфер обмена нажмите кнопку  – **Копировать** на Стандартной панели инструментов SMathStudio. При этом объект остаётся в рабочем документе и копируется в буфер.

− Для вставки объекта из буфера обмена установите крестообразный курсор в то место, куда Вы хотите вставить содержимое буфера обмена и нажмите кнопку  – **Вставить** на Стандартной панели SMathStudio.

Поскольку вырезать, копировать, вставлять объекты приходится часто, полезно запомнить сочетания клавиш клавиатуры, нажатие которых вызывает эти действия:

–  **Вырезать** – **Ctrl+X**.

–  **Копировать** – **Ctrl+C**.

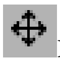
–  **Вставить** – **Ctrl+V**.

–  **Отмена предыдущего действия** – **Ctrl+Z**.

Выделенный объект, выделенную группу объектов можно перетащить или скопировать с помощью мыши. Для этого нужно:

− Подвести мышь к уже выделенному объекту или группе объектов, чтобы появилось изображение .

− При нажатой левой кнопке мыши перетащить курсор в то место, куда надо переместить объекты.

− Если нужно скопировать выделенные объекты, после появления нужно нажать левую кнопку мыши, затем нажать клавишу **Ctrl** и, удерживая нажатыми обе кнопки, перетащить курсор в нужное место.

При работе с SMathStudio можно пользоваться правой кнопкой мыши. В возникающем при её нажатии контекстном меню можно, в частности, найти и описанные выше операции **Вырезать, Копировать и Вставить.**

8. Отладка SMathStudio-документов

SMathStudio – документ представляет собой набор исходных данных для расчёта, расчётных формул и выведенных на экран результатов расчёта в виде чисел, таблиц и графиков. Каждый из перечисленных объектов занимает одну **математическую область**. Между ними в произвольном порядке располагаются **текстовые области**. В одном документе все математические объекты взаимодействуют друг с другом. SMathStudio выполняет вычисления сверху вниз и слева направо, последовательно друг за другом и не переходит к следующему объекту, не закончив работу с предыдущим. Текстовые области не оказывают на математические области никакого влияния.

Если какое-либо выражение содержит **ошибку**, величина, содержащая ошибку, отображается **красным цветом**.

Многие ошибки устраняются легко. Однако встречаются ошибки, корень которых кроется гораздо глубже. В таких случаях надо внимательно просмотреть все входящие в выражение величины. Например, часто к ошибкам приводит повторное применение одного и того же имени переменной или функции в одном рабочем документе. Возможно, что заданные Вами значения компьютер заменил на другие, ранее введенные.

Исходя из вышеизложенного, при выполнении лабораторных работ в одном рабочем документе может случиться, что значения величин, входящих в предыдущие задания, начинают существенно влиять на последующие. В результате компьютер либо выдает сообщение об ошибке, либо выдает неверное решение. Поэтому некоторые задания в процессе выполнения лабораторных работ мы рекомендуем выполнять в разных рабочих документах.

9. Печать документа

Чтобы распечатать документ, можно воспользоваться одним из способов:

– Выполнить команду **Файл→Печать** в Главном меню.
– Выбрать кнопку  на Стандартной панели инструментов.
– Нажать комбинацию клавиш **Ctrl** + **P**.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Вычисление значений математических выражений в SMathStudio

Цель работы: Научиться применять функциональные возможности математической системы SMathStudio: вводить и редактировать математические выражения, вычислять значения математических выражений в SMathStudio.

1. Ввод и редактирование математических выражений в SMathStudio

Для выполнения вычислений SMathStudio имеет основное рабочее поле. При стандартных настройках оно имеет вид тетрадного листа в клетку. В нем, словно на листе тетради, пользователь вводит математические выражения. Для этого следует поставить курсор (красный крестик) в выбранное место и начать ввод с клавиатуры (рисунок 1.1):

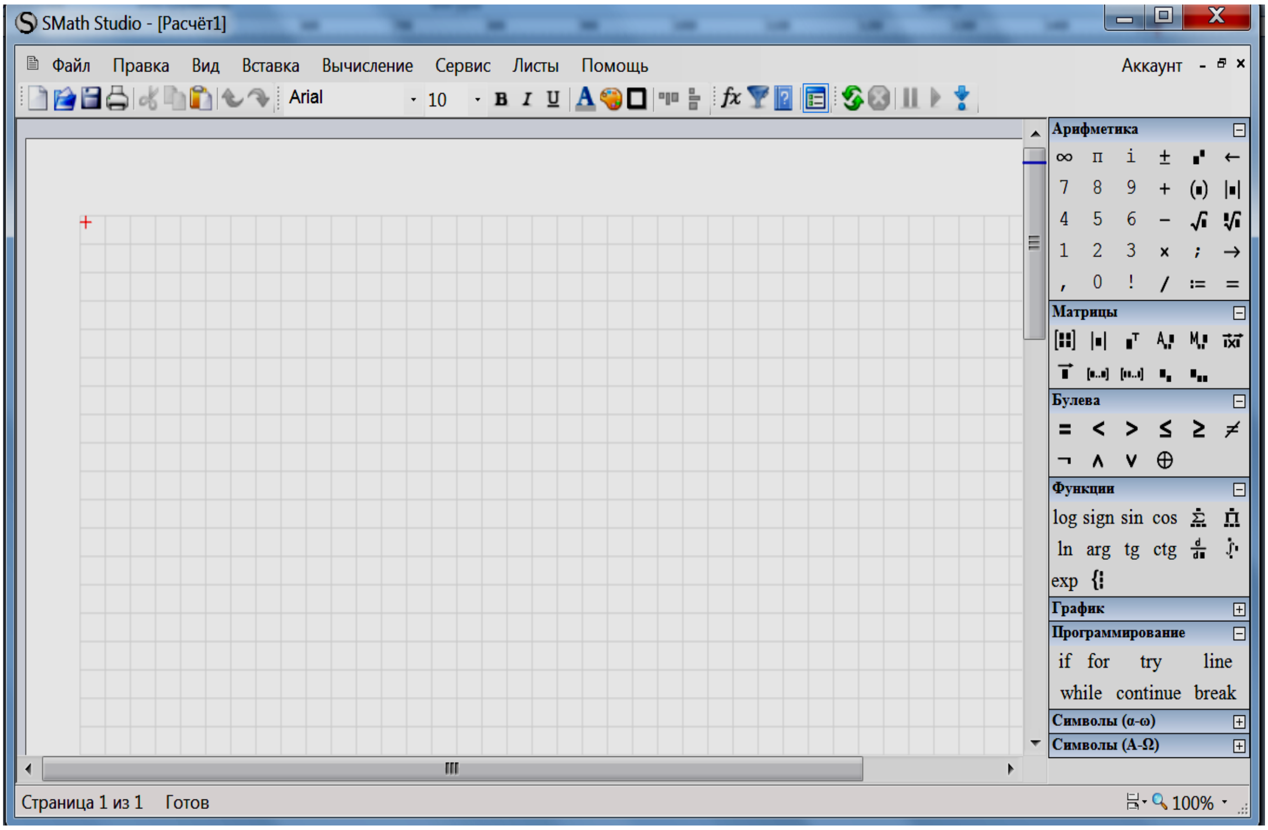


Рисунок 1.1 – Окно SMathStudio

Курсор в виде красного крестика указывает место, куда будет вводиться математическое выражение или текст. Курсор передвигается с помощью клавиш →, ↓, ←, ↑ или мыши.

Как и большинство приложений, кроме рабочего поля окно SMathStudio содержит главное меню, заголовок и панель инструментов.

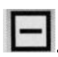
Верхняя строка экрана системы содержит имя документа, с которым вы работаете.

Следующая строка содержит команды **Главного меню**:

- **Файл** – работа с файлами (создание, сохранение, печать);
- **Правка** – редактирование документов;
- **Вид** – изменение средств обзора и включения/выключения элементов интерфейса;
- **Вставка** – установка вставок объектов (включая графику);
- **Вычисление** – управление процессом вычислений;
- **Сервис** – справочники, примеры, интерактивные книги;
- **Листы** – управление окнами системы;
- **Помощь** – работа со справочной базой данных о системе.

На второй и третьей строках располагаются **Панели инструментов** – стандартная, форматирования. Стандартная Панель инструментов и Панель форматирования SMathStudio сходны по виду и назначению с аналогичными панелями Microsoft Word.

Справа в окне программы расположена **Боковая панель инструментов**, она может быть убрана нажатием на кнопку  главной панели инструментов (рисунок 1.2).

Боковая панель состоит из отдельных панелей, содержащих наборы команд в виде кнопок. Каждая такая панель может быть свернута с помощью кнопки , расположенной в правом углу заголовка панели.

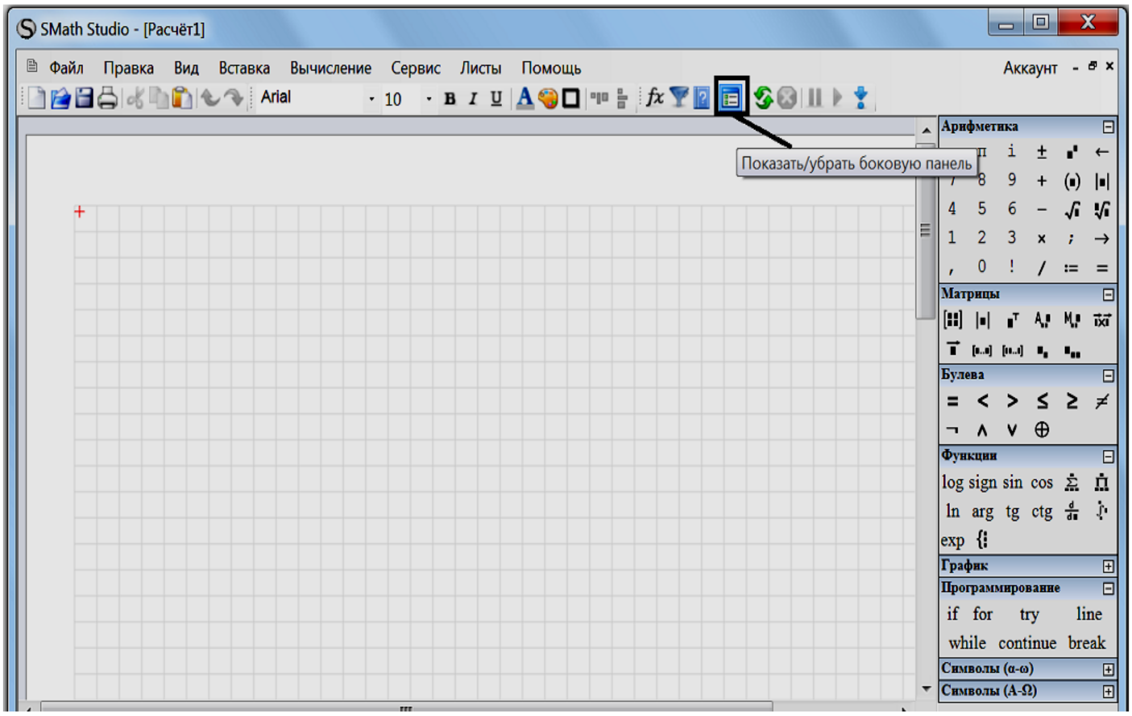


Рисунок 1.2 – Рабочее окно с боковой панелью инструментов

Рассмотрим назначение панелей.

Панель **«Арифметика»** содержит цифры от 0 до 9, разделитель десятичной дроби (в зависимости от настроек операционной системы это может быть и точка и запятая), число π, знак факториала «!», операции возведения в степень, квадратный корень, корень n-й степени.

Еще на панели есть знаки присваивания «:=», символьного вычисления «→» и знак равенства для вычисления в численной форме (рисунок 1.3):

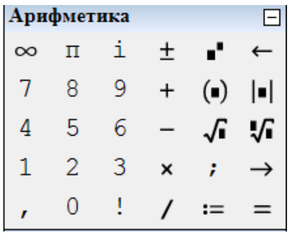


Рисунок 1.3 – Панель «Арифметика»

Панель **«Матрицы»** служит для выполнения действий с векторами и матрицами, а также для создания ранжированных переменных (рисунок 1.4):

Рисунок 1.4 – Панель «Матрицы»

Панель **«Булева»** содержит операторы Булевой алгебры (рисунок 1.5):

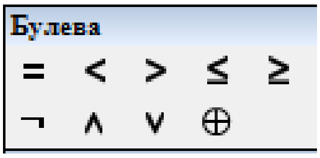


Рисунок 1.5 – Панель «Булева»

Панель **«Функции»** содержит некоторые функции, такие как логарифм, синус, косинус, тангенс, котангенс; операторы дифференцирования и интегрирования и др. (рисунок 1.6):

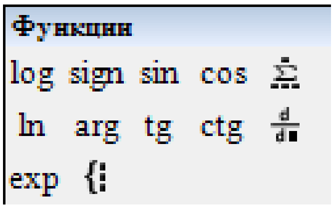


Рисунок 1.6 – Панель «Функции»

Панель **«График»** содержит кнопки, позволяющие вращать, масштабировать, перемещать графики (рисунок 1.7):

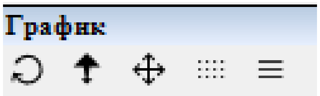


Рисунок 1.7 – Панель «Функции»

Панели **«Символы»** позволяют набирать греческие символы α, β, γ и так далее (рисунок 1.8):

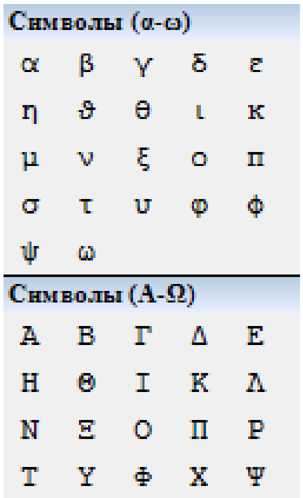


Рисунок 1.8 – Панель «Символы»

2. Простейшие арифметические вычисления

Набор математических выражений можно осуществлять, используя *клавиши клавиатуры* для следующих операций: + (сложение), – (вычитание), * (умножение), / (деление), ^ (возведение в степень), \ (квадратный корень), причем формула на экране будет иметь вид, общепринятый в математике.

Все эти операции также можно вводить, используя боковую панель «Арифметика».

Замечания:

1. В качестве разделяющего символа целой и дробной части числа, записанного в виде десятичной дроби, используется «запятая».

2. Ввод математического выражения заканчивается нажатием клавиши **Enter** или «щелчком» мыши вне области набора формулы (выражения).

3. Чтобы вычислить значение арифметического выражения, используется клавиша равно «=».

4. Чтобы объявить (задать) переменную, пользователь записывает имя, ставит знак присваивания «:=» (с помощью кнопки на панели Арифметика» или двоеточием на клавиатуре) и вводит значение.

Объявленную переменную можно использовать в выражениях, ее значение будет подставлено автоматически при вычислениях.

В SMathStudio есть некоторые правила записи выражений:

1. Используемая переменная или функция должна быть объявлена заранее. Заранее – значит левее или выше того выражения, где она используется в вычислении.

2. Если переменная переобъявлялась, то будет использовано то значение, которое встретилось самым последним перед пользованием в вычислениях.

3. При объявлении переменной в выражении можно использовать встроенные и ранее объявленные функции, ранее объявленные переменные и их

сочетания. Если используемые в выражении переменные ранее не объявлялись, то результат можно будет получить только в символьном виде (или объявить недостающие переменные и разместить выражение ниже или правее объявленных переменных для численного результата).

4. Переменная не обязательно должна вычисляться как числовое значение, допускается присваивать имена выражениям, дающим при вычислении матрицу.

5. Для символьных вычислений объявлять переменные заранее не требуется, если не нужно, чтобы при преобразовании выражений были подставлены их значения.

3. Редактирование выражений

Рассмотрим общие принципы редактирования выражений в MathCad. При вводе и редактировании математических выражений в MathCad важную роль играет курсор. Курсор выделяет символ или группу символов, с которым будет проводиться операция. Для управления курсором служат клавиши **Insert, Пробел, →, ←.**

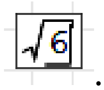
Оператор воздействует на последний введённый операнд. Для расширения операнда служит клавиша **Пробел.** Курсор может иметь вид ┘ (в этом случае оператор дописывается справа от операнда) или └ (оператор дописывается слева от операнда). Переключение между двумя курсорами осуществляется клавишей **Insert.**

Клавиша ← снимает объединения с группы символов, если курсор имеет форму ┘, а клавиша → с группы символов, когда курсор имеет форму └. Клавиша **Delete** удаляет символ после курсора, если последний имеет форму ┘; если же курсор выглядит как └, то эта клавиша выделяет расширенный операнд или удаляет текущий символ. Клавиша **Backspace** удаляет символ перед курсором, если курсор имеет форму └; если же курсор имеет форму ┘, то она выделяет расширенный операнд или удаляет символ. Выделенный операнд может быть удалён с помощью клавиш **Delete** и **Backspace**.

Разберите следующие примеры.

Задание 1. Вычислите значение выражения $\sqrt{6}-\dfrac{2{,}7\cdot 3{,}45}{5{,}9}$.

Решение. 1. Используя клавиши клавиатуры и кнопки боковой панели «Арифметика», введите $\sqrt{6}$, на экране отобразится:

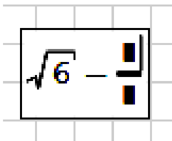


.

Чтобы «выйти» из-под знака корня, нажмите клавишу «Пробел», курсор «выйдет» из-под корня

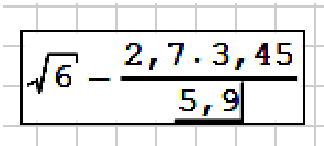
и вы сможете продолжить вводить выражение.

2. Нажмите знак «минус», затем клавишу деления / для ввода дроби, на экране отобразится:

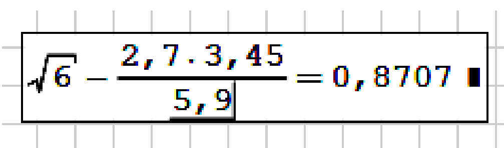


.

В числителе введите 2,7 * 3,45, в знаменателе 5,9



и нажмите знак =, после чего на экране появится результат вычислений:



.

3. Справа от результата вычисления вы увидите черный квадратик. «Щёлкните» по нему правой кнопкой мыши, появится дополнительное меню (рисунок 1.9):

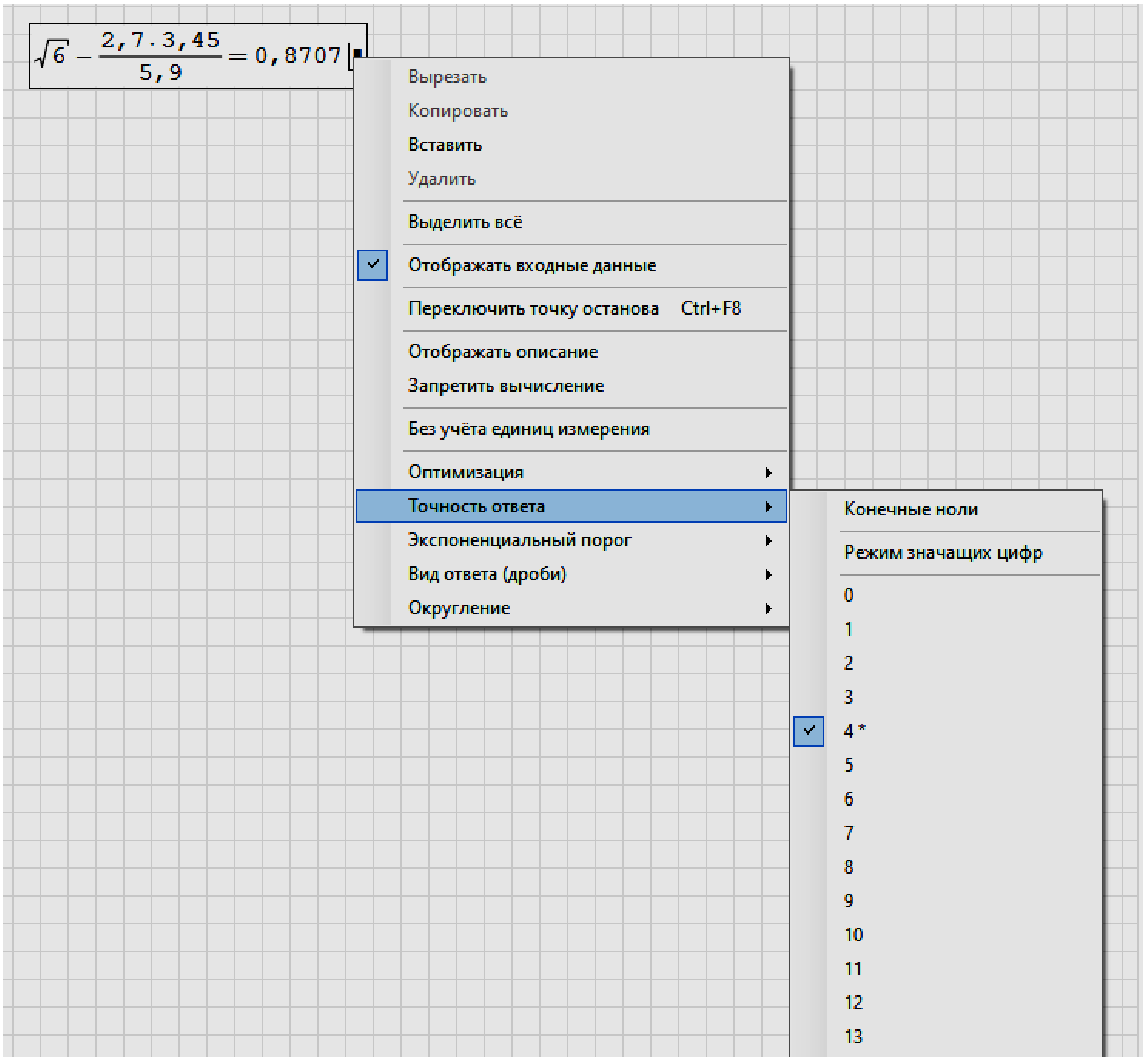


Рисунок 1.9 – Дополнительное меню «Точность ответа»

Выберите в этом меню опцию «Точность ответа». Сейчас по умолчанию установлена точность 4. Это означает, что ответ округляется до четырёх знаков после запятой (после десятичной точки).

Измените это значение на 2, посмотрите, как изменится результат:

$$\sqrt{6}-\frac{2,7\cdot 3,45}{5,9}=0,87$$.

Задание 2. Найдите значение выражения $4\sin 2-\sqrt{9{,}45+\ln 6}+tg3$.

Решение. Пользуясь клавиатурой и боковыми панелями «Арифметика» и «Функции», введите заданное выражение:

$$4\cdot\sin(2)-\sqrt{9,45+\ln(6)}+\mathrm{tg}(3)$$.

Введите знак **=** , после чего на экране появится результат вычислений:

$$4\cdot\sin(2)-\sqrt{9,45+\ln(6)}+\mathrm{tg}(3)=0,1418.$$

Замечание:

В инженерных и экономических расчётах часто используются иррациональные числа $\pi = 3,14159$ и $e = 2,71828$. В SMathStudio эти числа являются встроенными.

Чтобы ввести число **π**, достаточно набрать **греческую** букву **π** на боковой панели «Арифметика» (рисунок 1.10):

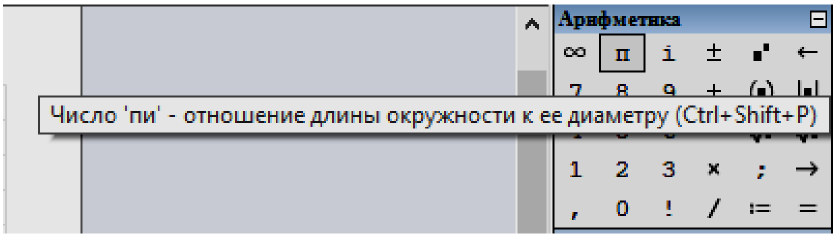


Рисунок 1.10 – Ввод числа π с боковой панели «Арифметика»

или на боковой панели «Символы» (рисунок 1.11):

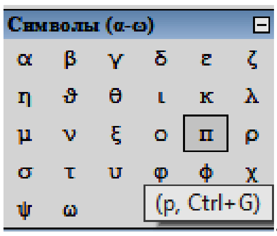


Рисунок 1.11 – Ввод числа π с боковой панели «Символы»

Чтобы ввести число **e**, достаточно набрать **латинскую** букву **e** на клавиатуре.

Задание 3. Вычислите значение выражения $\dfrac{2,3}{4,278+21,687}\cdot\sin\dfrac{\pi}{11}$.

Решение. В рабочем листе SMathStudio «щёлкните» мышью для обозначения места ввода формулы.

После этого последовательно наберите:

1. Число 2,3
2. Символ /
3. Число 4,278
4. Символ +
5. Число 21,687

На рабочем листе SMathStudio возникнет выражение:

$$\frac{2,3}{4,278+21,687}$$

Это первый критический момент в нашем примере. Необходимо, чтобы оператор умножения (символ *) воздействовал на всю дробь. В нашем случае курсор выделяет число 21.687. Надо объединить всю дробь в один операнд.

Для этого выполните следующие действия:

1. Нажмите **Пробел**, который объединит 4,278 + 21,687. После этого выражение примет вид:

$$\frac{2,3}{4,278+21,687}$$

2. Объедините всю дробь, нажав **Пробел** ещё раз:

$$\frac{2,3}{4,278+21,687}$$

Далее для умножения дроби на $\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)$ выполните следующее:

1. Нажмите знак умножения *

2. «Щёлкните» по значку sin на боковой панели «Функции» (или просто ввести с клавиатуры sin( ))

3. Нажмите символ **π** на боковой панели «Арифметика» или на боковой панели «Символы».

4. Нажмите символ деления /

5. Наберите 11

6. Выведите результат, нажав =

В результате у вас должно получиться следующее:

$$\frac{2,3}{4,278+21,687}\cdot \sin\left(\frac{\pi}{11}\right)=0,025$$.

Задание 4. Вычислите значение выражения $e^{\sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{7}-\frac{5}{18}\right)^2}}$.

Решение. Для вычисления этого выражения проделайте следующие действия:

1. Введите с клавиатуры (на английской раскладке) символ **e**
2. Введите символ возведения в степень ^
3. На боковой панели «Арифметика» выберите корень n-й степени 
4. Введите степень корня (цифру 3)
5. Под корнем введите символ $\boldsymbol{\pi}$
6. Введите символ /
7. Введите число 7
8. Для объединения $\frac{\pi}{7}$ в один операнд нажмите клавишу **Пробел**, на экране должно получиться:

$$e^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{7}}}$$.

9. Введите символ –
10. Введите число 5
11. Введите символ /
12. Введите число 18
13. Дважды нажав **Пробел**, объедините выражения $\frac{\pi}{7}-\frac{5}{18}$ в один операнд.

14. Введите символ возведения в степень ^. Наберите число 2, после чего выражение примет вид:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{7}-\frac{5}{18}\right)^{2}}.$$

15. Для вывода результата нажмите знак равенства =, у вас должно получиться:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{7}-\frac{5}{18}\right)^{2}}=1{,}3608.$$

4. Переменные в SMathStudio. Оператор присвоения. Вычисление математических выражений, содержащих переменные

4.1. Задание переменной в SMathStudio

В SMathStudio можно использовать переменные величины. Для этого вводят имя переменной, присваивают ей определенное значение, а затем используют при вычислении математических выражений.

В SMathStudio существует ряд **ограничений** на имена. В именах переменных **не допускается** использование русских букв. Прописные и строчные буквы считаются **различными** символами (например, b и B – разные имена).

Чтобы определить переменную в SMathStudio, необходимо ввести ее имя и затем ввести символ присвоения **:=**. Этот символ можно ввести с боковой панели «Арифметика» или с клавиатуры, нажав клавишу **:** «двоеточие» (на английской раскладке). Например, математическая запись a = 4,8 на экране будет иметь вид:

$$a := 4{,}8.$$

Замечания:

1. SMathStudio читает документ сверху вниз и слева направо. Определив переменную, её можно использовать везде ниже и правее равенства, которым она была определена ранее. Чтобы в любой момент увидеть значение переменной, достаточно набрать её имя и символ = (равно).

2. Если в дальнейшем вы присвоите уже существующей переменной новое значение, то ниже и правее будет применено новое значение переменной, а выше и левее – старое.

3. В SMathStudio можно использовать переменные с индексом. Для их определения перед индексом следует набрать символ **.** (точка латинской клавиатуры). Например, чтобы определить переменную $\mathbf{x_{min}}$, необходимо набрать символ x, затем точку, после чего **min**. На экране появится:

$$x_{min}.$$

Выполните следующие задания.

Задание 5 **.** Вычислите значение выражения $\dfrac{a-2\sqrt{a}}{3a+tga}$ при $a = 2{,}356$.

Решение. 1. Вначале необходимо присвоить переменной *a* значение 2,356. Для этого введите имя переменной *a*, затем нажмите клавишу с символом **:** (двоеточие) и введите число 2,356, на экране появится:

$$\boxed{a := 2{,}356}.$$

2. Теперь с помощью клавиатуры и боковых панелей «Арифметика» и «Функции» введите выражение:

$$\boxed{\frac{a-2\cdot\sqrt{a}}{3\cdot a+\mathrm{tg}(a)}}$$

(при вводе выражения руководствуйтесь пунктом 2.2 «Редактирование выражений»).

Нажмите знак равенства $=$, у вас должно получиться:

$$\frac{a-2\cdot\sqrt{a}}{3\cdot a+\mathrm{tg}(a)}=-0,1176$$.

Задание 6. Решите квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ при $a = 2$, $b = -7$, $c = 3$.

Решение. 1. Присвойте переменным a, b и c указанные значения:

$$a := 2$$,

$$b := -7$$,

$$c := 3$$.

2. Вычислите значение дискриминанта по формуле

$$D := b^2 - 4\cdot a\cdot c$$.

3. Вычислите значения неизвестных уравнения по формулам:

$$x_1 := \frac{-b+\sqrt{D}}{2\cdot a}$$,

$$x_2 := \frac{-b-\sqrt{D}}{2\cdot a}$$.

Замечание:

Чтобы ввести переменные с индексом, после имени переменной нажмите символ **.** (точка) латинской клавиатуры (см. замечание 3, стр. 24).

4. Выведите значения искомых переменных x_1 и x_2. Для этого введите имя переменной и знак $=$. На экране появятся значения неизвестных:

$$x_1 = 3$$,

$$x_2 = 0,5$$.

4.2. Представление результатов вычислений. Форматирование чисел

SMathStudio вычисляет все значения выражений с точностью до 15 знаков, но по умолчанию в стандартном документе выводит на экран числовые результаты с точностью до четырёх цифр в дробной части.

Однако этим возможности SMathStudio по представлению результатов не ограничиваются.

Чтобы **изменить формат числа**, необходимо установить указатель мыши на этом числе, «щёлкнуть» **правой кнопкой** мыши. Откроется окно форматирования (рисунок 1.12):

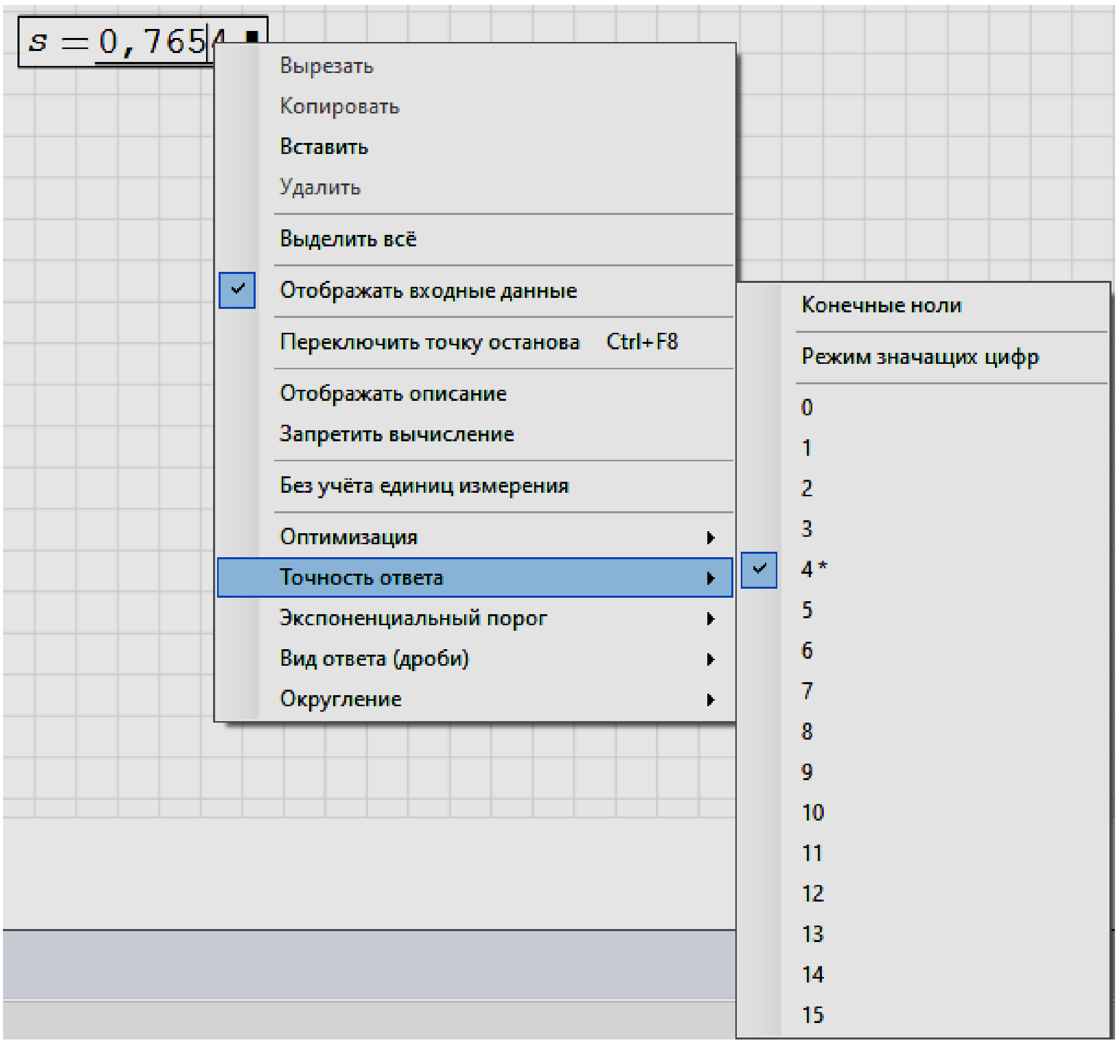


Рисунок 1.12 – Окно форматирования: опция «Точность ответа»

В этом окне можно выбрать опцию «Точность ответа» и установить требуемое количество значащих цифр после десятичной точки (от 0 до 15).

Кроме этого можно изменить вид ответа, выбрав опцию «Вид ответа (дроби)» (рисунок 1.13):

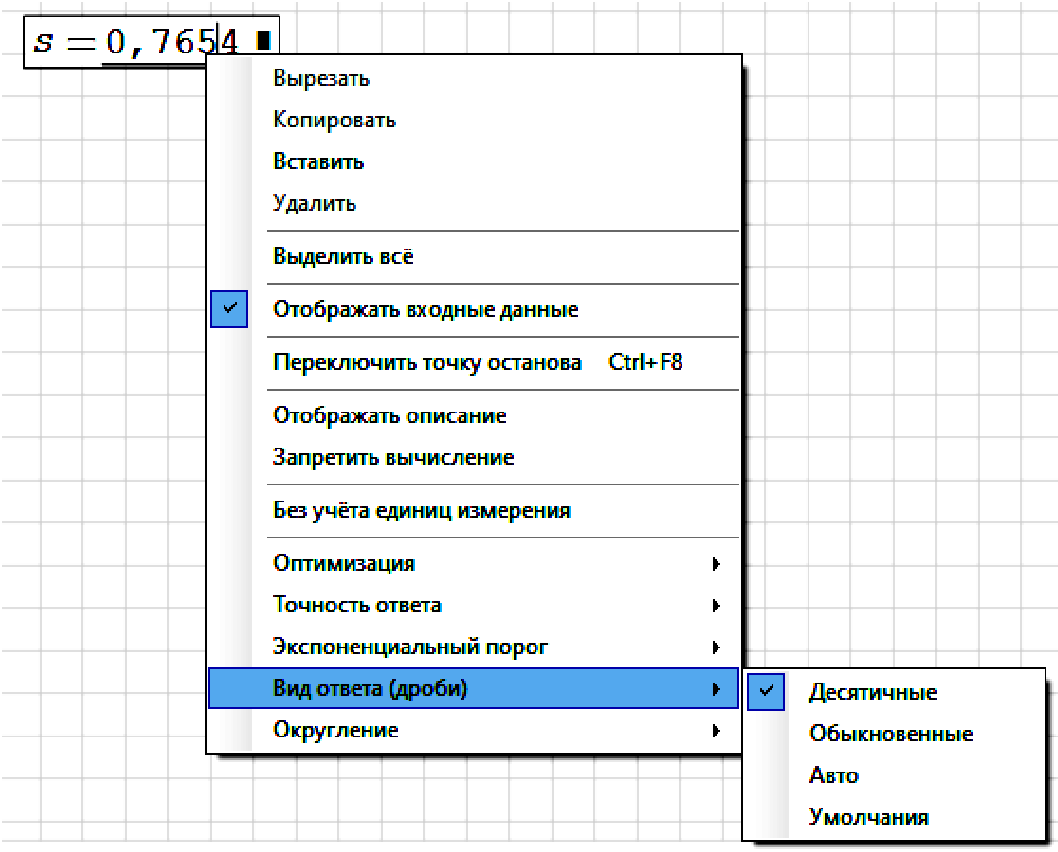


Рисунок 1.13 – Окно форматирования: опция «Вид ответа»

В этом окне можно выбрать опцию «Десятичные», тогда результат будет представлен в виде десятичной дроби, например:

$$s = 0,7654.$$

Если выбрать опцию «Обыкновенные», то результат будет представлен в виде обыкновенной дроби, например число s = 0,7654 в этом формате примет вид:

$$s = \frac{7,6543 \cdot 10^{9}}{1 \cdot 10^{10}}.$$

Задание 7. Изучите форматы чисел на примере чисел e^{10} и $\frac{\pi}{2}$.

Решение. 1. Введите выражение e^{10} и нажмите знак = . На экране отобразится число в виде:

$$e^{10} = 22026{,}4658$$.

2. Установите указатель мыши на этом числе, «щёлкните» правой кнопкой мыши, выберите опцию «Точность ответа» и установите 2 значащих после десятичной точки. Результат примет вид:

$$e^{10} = 22026{,}47$$.

3. Введите выражение $\frac{\pi}{2}$ и нажмите знак = . На экране отобразится число в виде:

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}5708$$.

4. Установите указатель мыши на этом числе, «щёлкните» правой кнопкой мыши, выберите опцию «Точность ответа» и установите 10 значащих цифр после десятичной точки. Результат примет вид:

$$\frac{\pi}{2} = 1{,}5707963268$$.

5. Установите указатель мыши на этом числе, «щёлкните» правой кнопкой мыши, выберите опцию «Вид ответа» и выберите вкладку «Обыкновенные». Результат примет вид:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{8{,}8428 \cdot 10^{14}}{5{,}6295 \cdot 10^{14}}$$.

Контрольные вопросы

1. Для чего предназначена панель «Арифметика»?
2. Какие действия можно выполнять с помощью панели «Матрицы»?
3. Какие операторы содержит панель «Булева»?
4. В чем состоит назначение панели «Функции»?
5. Какие кнопки содержит панель «График»?
6. Для чего предназначена панель «Символы»?
7. Какие клавиши клавиатуры используются для операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень?
8. Как определить новую переменную в SMathStudio?
9. Перечислите правила записи выражений в SMathStudio.
10. Какие клавиши используются для редактирования выражений в SMathStudio?
11. Как изменить точность ответа?
12. Как в SMathStudio определить переменную с индексом?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Определение функции в SMathStudio. Построение графиков функций

Цель работы: Научиться задавать ранжированные переменные и функции в SMathStudio, строить графики функций в декартовой и полярной системах координат, графики функций, заданных в параметрической форме, строить поверхности. Научиться форматировать график и область графического блока.

1. Ранжированные переменные. Построение таблиц

При машинной реализации функций используют таблицы, в которых для выбранных значений аргументов указываются соответствующие им значения функций. Как правило, значения аргумента выбираются по следующим правилам: их располагают в порядке возрастания или убывания значений. Разность между последующим и предыдущим значениями постоянна и называется шагом. Организованный массив значений аргумента называется ранжированной переменной (ранжированным аргументом).

Описание ранжированной переменной в SMathStudio имеет вид: имя переменной, знак присвоения **:=**, квадратная скобка [, начальное значение, символ **;** (точка с запятой), следующее за начальным значение (то есть начальное +шаг), символ **..** , конечное значение, квадратная скобка].

Например, запись:

x:=[1; 1,2 .. 2]

означает, что переменная x принимает значения от 1 до 2 с шагом 0,2 (1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2).

Шаг равен разности между следующим за начальным и начальным значениями, то есть в нашем примере 1,2 – 1= 0,2.

Замечание:

Если шаг изменения ранжированной переменной равен 1, то достаточно ввести её начальное и конечное значение. Например:

a:=[0..5],

что означает задание ряда значений a = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Чтобы определить ранжированную переменную, необходимо набрать имя переменной, затем знак присвоения **:=** и нажать букву **r** на английской раскладке.

После чего на экране появится список команд (рисунок 2.1):

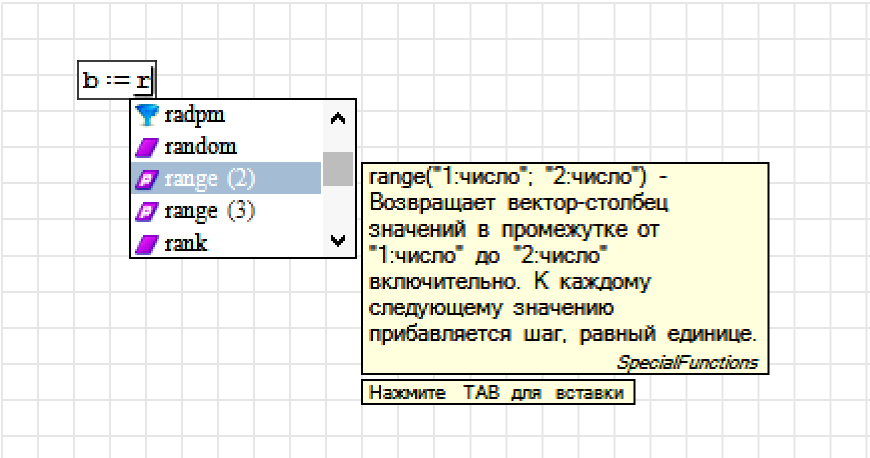
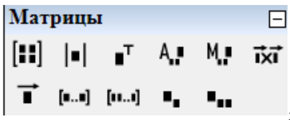


Рисунок 2.1 – Вызов команды rang

Здесь команда rang(2) определяет промежуток с шагом 1. Если необходим промежуток с другим шагом, отличным от 1, то необходимо выбрать rang(3).

Замечание: Команды rang(2) и rang(3) можно подать и с помощью боковой панели «Матрицы» (рисунок 2.2):



,

Рисунок 2.2 – Боковая панель «Матрицы»

используя вкладку  вместо команы rang(2) – задание ранжированной переменной с шагом 1 по умолчанию и вкладку  вместо команы rang(3) – задание ранжированной переменной с нужным вам шагом.

Для того, чтобы вывести значения ранжированной переменной в виде таблицы, необходимо ввести имя переменной и знак равно = , например x=.

Задание 1. Задайте ранжированной переменной **x** пределы изменения от -5 до 5 с шагом 1.

Результат выведите в виде таблицы.

Решение. Для выполнения задания проделайте следующее:

1. Введите имя ранжированной переменной **x** и символ присвоения **:=** (клавиша **:** на английской раскладке или воспользуйтесь боковой панелью «Арифметика»):

$$\mathbf{x} :=.$$

2. Нажмите букву **r** на английской раскладке и выберите команду rang(2).

На экране появится форма для заполнения:

$$\mathbf{x} := [\blacksquare\,..\,\blacksquare].$$

Введите начальное и конечное значения ранжированной переменной:

$$\mathbf{x} := [-5\,..\,5].$$

3. Чтобы посмотреть все значения переменной, введите:

x=.

На экране появится таблица значений ранжированной переменной:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Задание 2. Задайте ранжированной переменной b пределы изменения от -1 до 2 с шагом 0,25. Результат выведите в виде таблицы.

Решение. Для выполнения задания проделайте следующее:

1. Введите имя ранжированной переменной и символ присвоения

$$b:=\blacksquare$$.

2. Нажмите букву **r** на английской раскладке и выберите команду rang(3).

На экране появится форма для заполнения:

$$b:=[\blacksquare;\blacksquare..\blacksquare]$$.

Введите начальное значение, следующее за начальным (то есть начальное + шаг) и конечное значение ранжированной переменной:

$$b:=[-1;-0,75..2]$$.

3. Чтобы увидеть значения переменной, выведите таблицу значений переменной b. Для этого наберите b=.

На экране отобразится таблица:

$$b=\begin{bmatrix} -1 \\ -0,75 \\ -0,5 \\ -0,25 \\ 0 \\ 0,25 \\ 0,5 \\ 0,75 \\ 1 \\ 1,25 \\ 1,5 \\ 1,75 \\ 2 \end{bmatrix}$$.

2. Функции SMathStudio

Все функции, используемые в SMathStudio, можно разделить на два класса:

- встроенные;
- определяемые пользователем.

2.1. Встроенные функции

Встроенные функции можно вводить с клавиатуры, некоторые из них (sin, cos, tg, ctg, ln, log, exp, arg) – с боковой панели «Функции» (рисунок 2.3):

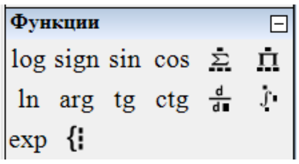


Рисунок 2.3 – Боковая панель «Функции»

Кроме того, есть удобный механизм их вставки с помощью кнопки стандартной панели (вверху экрана). Для этого можно поступить одним из следующих способов:

– щелкнуть по значку мастера функций на стандартной панели;

– выбрать в пункте меню **Вставка** команду **Функция**.

Также можно нажать комбинацию клавиш **Ctrl+E**.

Независимо от способа вызова мастера функций на экране откроется окно, изображённое на рисунке 2.4:

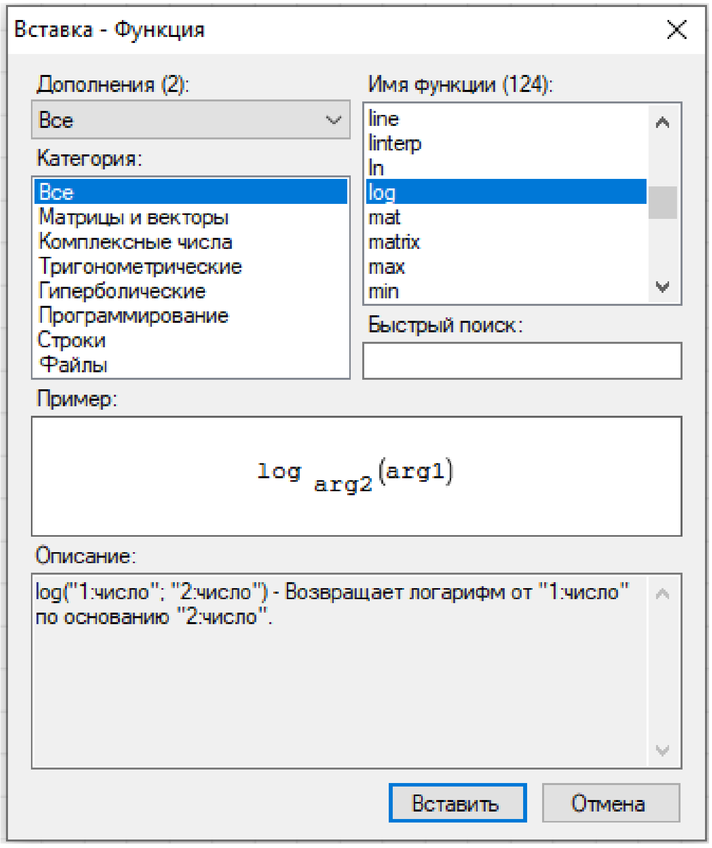


Рисунок 2.4 – Окно «Вставка»-«Функция»

Рассмотрим это окно подробно. Его левая часть – **Категория** – предназначена для указания категории, к которой принадлежит нужная функция.

В категории **Все** находятся все функции SMathStudio. Если неизвестно, в какой категории находится данная функция, то её всегда можно найти в категории **Все**.

Если вы знаете, к какой категории относится искомая вами функция, то выберите нужную категорию.

После выбора категории в правой части окна отображается список функций – **Имя функции**. Заданную функцию можно увидеть в нижней части окна с её кратким описанием (рисунок 2.4).

В нижней части окна мастера функций находятся следующие кнопки: **Вставить**, **Отмена**.

Задание 3. Вычислите с помощью мастера функций $f(x)$ следующие функции: $\sin\frac{\pi}{6}$, $tg\frac{\pi}{4}$, $\ln 4$, $\log_2 16$, e^{-2}.

Решение. Для выполнения задания проделайте следующее:

1. Одним из описанных способов выведите на экран функцию:

$$\boxed{\mathrm{sin}(\blacksquare)}.$$

В скобках введите значение аргумента $\frac{\pi}{6}$ и нажмите знак =.

В результате получите:

$$\mathrm{sin}\left(\frac{\pi}{6}\right)=0,5.$$

2. Аналогично для остальных функций:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\mathrm{ln}(4)=1,3863$$

$$\mathrm{log}_{\,2}(16)=4$$

$$\mathrm{exp}(-2)=0,1353.$$

2.2. Функции, определяемые пользователем

В SMathStudio существует возможность определять функции как одного, так и нескольких аргументов.

Удобство и эффективность расчётов в SMathStudio прежде всего определяется возможностью и легкостью создания функций пользователя.

Чтобы ***задать функцию пользователя,*** необходимо: записать название функции, затем в скобках аргумент или аргументы (если их несколько) функции, после оператор присваивания **:=** и алгебраическое выражение функции.

Например:

$$y(x):=2\cdot x^3+\sqrt{x}\,.$$

Задание 4. Задайте функцию пользователя $f(x)=2\sin x+3\cos x$. Найдите значения $f(1)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{\sqrt{12}}\right)$.

Решение. 1. Задайте функцию пользователя f(x). Для этого введите:

$$f(x):=2\cdot\sin(x)+3\cdot\cos(x)\,.$$

2. Вычислите значения функции f(x) при x=1, то есть f(1). Для этого введите f(1)=.

3. На экране появится:

$$f(1)=3{,}3038\,.$$

4. Аналогично найдите значения:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3{,}5355$$

$$f\left(\frac{\pi}{\sqrt{12}}\right)=3{,}4238\,.$$

Задание 5. Найдите значение функции $g(x)=\sin x+\log_3 x$, если x – ранжированная переменная, принимающая значения от 1 до 2 с шагом 0,1.

Выведите значения переменной x и функции g(x) на экран в виде таблиц.

Решение. 1. Задайте ранжированную переменную x:

$$x:=[1;1,1..2]$$.

2. Задайте функцию пользователя g(x):

$$g(x):=\sin(x)+\log_3(x)$$.

3. Для того, чтобы вывести на экран значения переменной x, введите x=. На экране отобразится:

$$x=\begin{bmatrix}1\\1,1\\1,2\\1,3\\1,4\\1,5\\1,6\\1,7\\1,8\\1,9\\2\end{bmatrix}$$.

Чтобы вывести на экран таблицу значений функции g(x), необходимо «векторизировать» функцию. Для этого введите g(x), затем выделите левой кнопкой мыши $g(x)$ (или подчеркните с помощью клавиши «пробел» $\boxed{g(x)}$) и нажмите кнопку «векторизации» на боковой панели «Матрицы». После чего нажмите знак = («равно»). На экране отобразится:

$$\overrightarrow{g(x)}=\begin{bmatrix}0,8415\\0,978\\1,098\\1,2024\\1,2917\\1,3666\\1,4274\\1,4747\\1,5089\\1,5305\\1,5402\end{bmatrix}$$.

3. Построение графиков в SMathStudio

Построение графика функции в SMathStudio можно осуществить несколькими способами.

Сначала рассмотрим **построение графика с использованием главного меню.**

Чтобы выполнить построение графика того или иного вида, необходимо указать его тип. Перечень основных типов графиков, предлагаемый SMath-Studio, можно увидеть, если обратиться к пункту главного меню **Вставка → График** (рисунок 2.5):

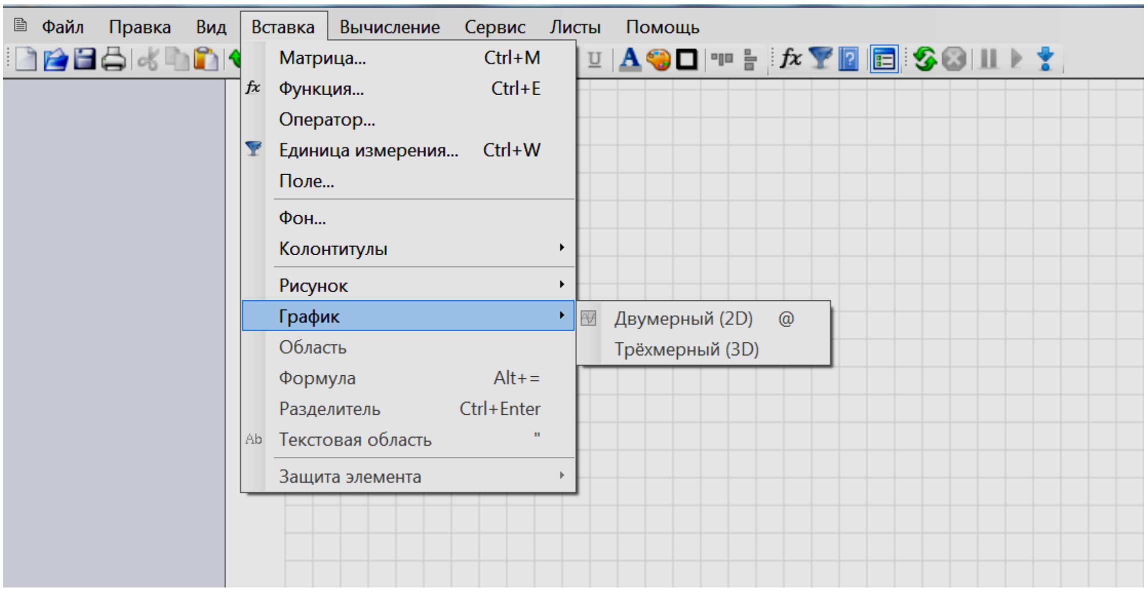


Рисунок 2.5 – Перечень основных типов графиков

Команды, представленные в меню **График**, позволяют построить следующие типы графиков:

Двумерный (2D) – график на плоскости в декартовой системе координат;

Трёхмерный (3D) – график в пространстве в декартовой системе координат.

Вызов любой из этих команд приведет к вставке в рабочий документ специальной графической области, называемой **шаблоном**. Шаблон может содержать одно или несколько полей ввода. Заполнение этих полей соответствующими исходными данными завершит процесс построения графика.

На рисунке 2.6 изображен фрагмент рабочего документа, содержащий шаблон для создания двумерного графика в декартовой системе координат.

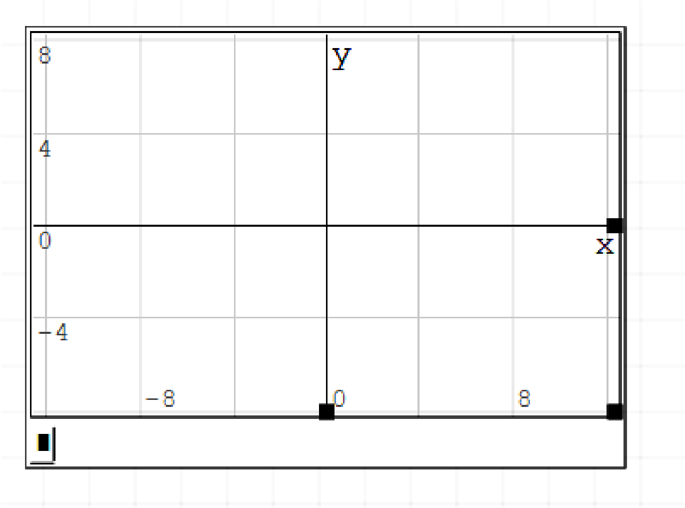


Рисунок 2.6 – Шаблон для создания графика в декартовой системе координат

Отметим, что шаблон для построения появляется в обозначенном месте рабочего документа, то есть там, где находится курсор. Но если надо, графическую область можно перетащить в другое место при помощи мыши.

Меняются также и размеры области построения графика. Их можно увеличивать или уменьшать по вертикали, горизонтали и диагонали, удерживая курсор мыши на специальных маркерах (черных квадратиках, находящихся на границах шаблона).

Графические области, как и любые другие объекты SMathStudio, при необходимости выделяют, помещают в буфер обмена, копируют, перемещают или удаляют.

3.1. Построение графиков в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости

Декартова прямоугольная система координат на плоскости задаётся двумя взаимно перпендикулярными осями с общим началом – точкой О, которую называют началом координат и так, что кратчайший поворот от первой оси ко второй виден против часовой стрелки. Первая ось обозначается Ох и называется осью абсцисс, вторая обозначается Оу и называется осью ординат.

Положение любой точки в прямоугольной системе координат определяется двумя упорядоченными числами (х, у), которые называются координатами этой точки.

Переменная величина ***y*** называется функцией переменной величины ***x***, если каждому значению, которые может принимать ***x***, соответствует одно значение ***y***.

При этом переменную величину ***x*** называют аргументом функции $y = f(x)$.

Рассмотрим построение графиков функций в декартовой прямоугольной системе координат Оху.

Для построения графика функции в декартовой системе координат необходимо проделать следующие операции:

1. Задать функцию.

2. Установить крестообразный курсор в то место, где надо построить график.

3. В главном меню выбрать **Вставка → График→Двумерный**.

4. В появившемся шаблоне графика в нижнем левом углу (поле имени функции) ввести имя функции.

5. «Щёлкнуть» мышью вне шаблона графика или нажать кнопку Enter.

Замечания:

1. При построении двумерного графика имя функции можно задавать любым, а в качестве аргумента может быть только х, например f(x), g(x), y(x).

2. По умолчанию график будет построен в масштабе – одна клеточка 4×4.

3. Функцию также можно заранее не определять, а ввести её сразу в шаблоне. Такой способ построения называется ***быстрым***.

Задание 6. Постройте график функции $y = 3\sin x + 2\cos x$ быстрым способом.

Решение. 1. В главном меню выберите:

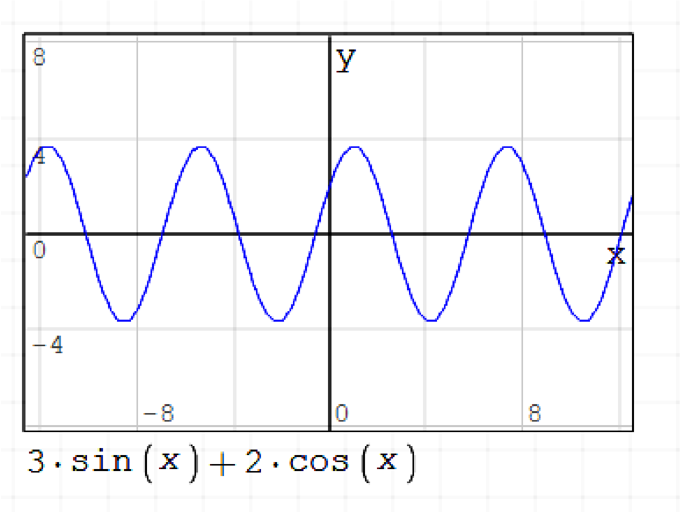
Вставка → График→Двумерный.

В левом нижнем углу появившегося шаблона введите функцию

$$3 \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x)$$

и нажмите Enter.

На экране отобразится график (рисунок 2.7):



.

Рисунок 2.7 – График функции $y = 3\sin x + 2\cos x$
в декартовой системе координат

Теперь постройте график функции пользователя, ***задав функцию*** перед построением графика.

Задание 7. Постройте график функции $f(x) = \cos\frac{x}{2} + \frac{\cos 5x}{5}$.

Решение. 1. Задайте функцию:

$$f(x) := \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\cos(5 \cdot x)}{5}$$
.

2. Вставьте шаблон для построения графика и в левом нижнем углу появившегося шаблона введите имя функции f(x).

У вас получится график вида (рисунок 2.8):

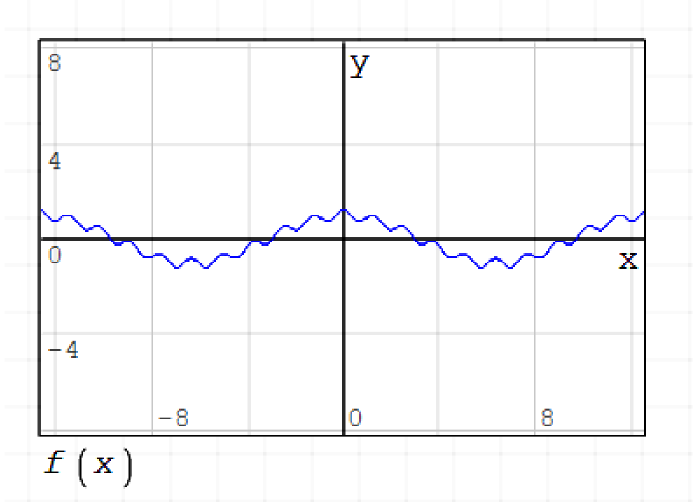


Рисунок 2.8 – График функции $f(x)=cos\frac{x}{2}+\frac{cos\,5x}{5}$

в декартовой системе координат

Замечания:

В SMathStudio в одном шаблоне можно разместить ***несколько графиков***. Для этого необходимо:

1. Вызвать шаблон графика.

2. В поле имени функции (нижнем левом углу шаблона) вставить  из боковой панели «Функции».

3. Указать заданные заранее имена функций (или ввести несколько имён функций быстрым способом, как было показано в задании 6).

Задание 8. Постройте графики функций $\sin\frac{x}{2}$, $\sin 2x$, $\frac{\sin x}{2}$ в одном шаблоне быстрым способом.

Решение. 1. Выведите шаблон для построения двумерного графика и в нижнем левом углу шаблона вставьте  из боковой панели «Функции» (рисунок 2.9):

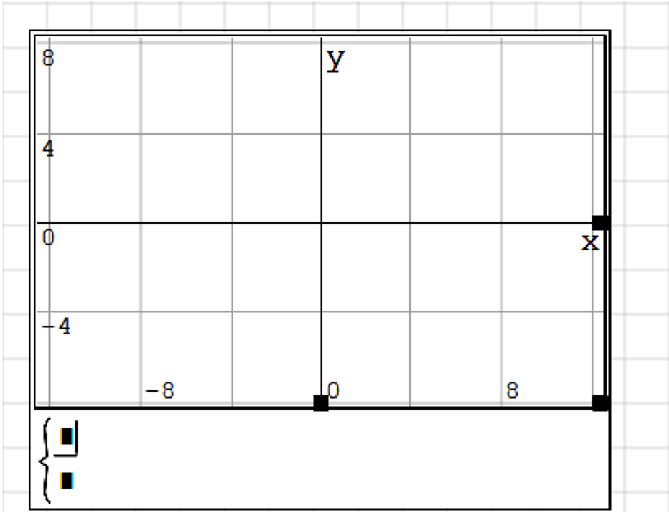


Рисунок 2.9 – Фрагмент построения нескольких графиков в одном шаблоне

2. Введите последовательно две первых функции $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$, $\sin(2\cdot x)$.

Чтобы ввести имя третьей функции, нажмите клавишу «пробел» несколько раз, пока не появится маленький чёрный квадратик (маркер) справа от второй функции (рисунок 2.10):

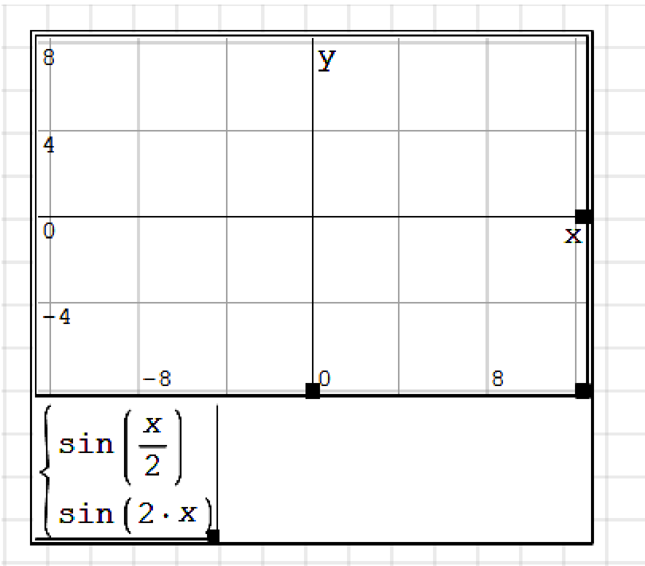


Рисунок 2.10 – Иллюстрация ввода функций

при построении нескольких графиков в одном шаблоне

3. «Потяните» за маркер, чтобы добавились поля для новых функций (рисунок 2.11):

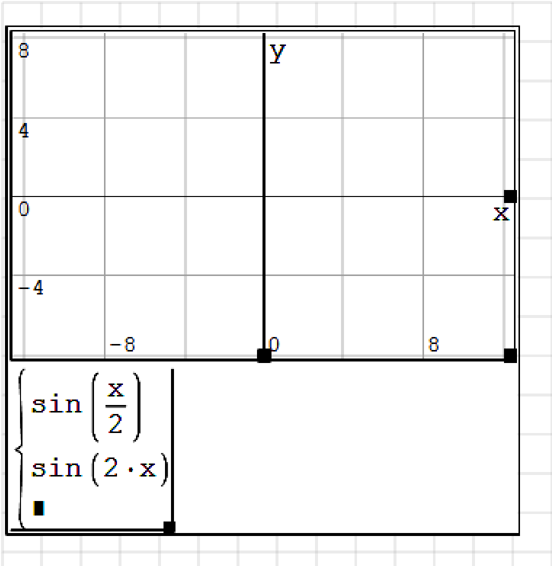


Рисунок 2.11 – Иллюстрация ввода функций

при построении нескольких графиков в одном шаблоне

4. В добавленном поле введите третью функцию $\frac{\sin(x)}{2}$.

У вас должен получиться рисунок вида (рисунок 2.12):

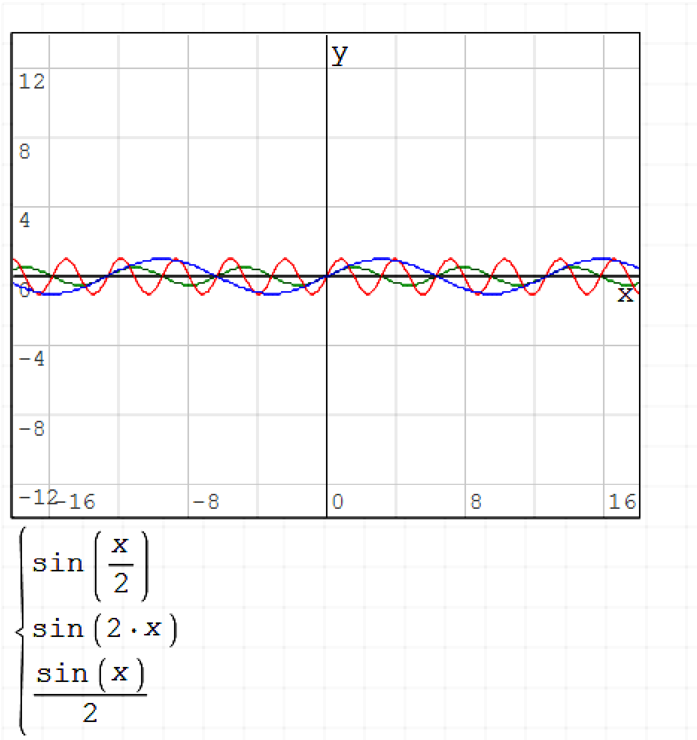


Рисунок 2.12 – Графики функций $\sin\frac{x}{2}$, $\sin 2x$, $\frac{\sin x}{2}$ в одном шаблоне

Замечание:

Если нужно добавить графики еще нескольких функций, снова нажмите клавишу «пробел» несколько раз, пока не появится маленький чёрный квадратик (маркер) справа от третьей функции, «потяните» за маркер, чтобы добавились поля для новых функций.

3.2. Построение графиков функций, заданных в параметрической форме

Задание функции с помощью равенств $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\mathrm{t} \in [\mathrm{a}; \quad \mathrm{b}]$ называется **параметрическим**, а переменная t называется **параметром**. Например, система $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \cos t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$ задает функцию аргумента x.

Чтобы построить график функции, заданной параметрически, нужно найти координаты точек этого графика. Для этого нужно найти значения функций $\mathrm{x(t)}$ и $\mathrm{y(t)}$ и по точкам с координатами(x(t); y(t)) построить график.

Эти значения должны быть записаны как столбцы матрицы, которую мы обозначим $z(x)$, а затем построим функцию $z(x)$.

Рассмотрим построение графика параметрически заданной функции на примере.

Задание 9. Постройте график линии, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \\ y(t) = \dfrac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \end{cases},$$

$$\mathrm{t} \in [-5; \quad 5].$$

Решение. 1. Задайте значения ранжированной переменной t:

$$t := [-5; -4,9 .. 5]$$.

Чтобы вывести на экран значения переменной t, нажмите t=.

На экране появится:

$$t = \begin{bmatrix} -5 \\ -4,9 \\ -4,8 \\ -4,7 \\ -4,6 \\ -4,5 \\ -4,4 \\ -4,3 \\ -4,2 \\ -4,1 \\ -4 \\ -3,9 \\ -3,8 \\ -3,7 \\ -3,6 \\ -3,5 \\ -3,4 \\ -3,3 \\ -3,2 \\ -3,1 \\ -3 \\ -2,9 \\ -2,8 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

2. Определите две функции:

$$x(t) := \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1},$$

$$y(t) := \frac{t \cdot (t^2 - 1)}{t^2 + 1}.$$

Чтобы увидеть значения функций, визуализируйте их, представив как арифметические векторы («векторизуем»). Для этого выделите левой копкой мыши функцию x(t) и нажмите кнопку векторизации  на боковой панели «Матрицы» (как мы делали в задании 5, стр. 39).

На экране появятся значения:

$$\overrightarrow{x(t)}=\begin{bmatrix}0{,}9231\\0{,}92\\0{,}9168\\0{,}9134\\0{,}9097\\0{,}9059\\0{,}9018\\0{,}8974\\0{,}8927\\0{,}8877\\0{,}8824\\0{,}8766\\0{,}8705\\0{,}8639\\0{,}8567\\0{,}8491\\0{,}8408\\0{,}8318\\0{,}8221\\0{,}8115\\0{,}8\\0{,}7875\\0{,}7738\\\vdots\end{bmatrix}$$

Затем выделите левой кнопкой мыши функцию y(t) и нажмите кнопку векторизации на боковой панели «Матрицы»:

$$\overrightarrow{y(t)}=\begin{bmatrix}-4{,}6154\\-4{,}5082\\-4{,}4007\\-4{,}2929\\-4{,}1848\\-4{,}0765\\-3{,}9678\\-3{,}8587\\-3{,}7494\\-3{,}6396\\-3{,}5294\\-3{,}4188\\-3{,}3078\\-3{,}1963\\-3{,}0842\\-2{,}9717\\-2{,}8586\\-2{,}7449\\-2{,}6306\\-2{,}5156\\-2{,}4\\-2{,}2836\\-2{,}1665\\\vdots\end{bmatrix}.$$

3. Для построения графика нужна матрица из двух столбцов:

1-й столбец – значения $x(t)$,

2-й столбец – значения $y(t)$.

Объедините столбцы $\overrightarrow{x(t)}$ и $\overrightarrow{y(t)}$ в одну матрицу z(x) с помощью оператора

$$\mathrm{augment}(\blacksquare),$$

где в скобках через ; («точку с запятой») укажите векторы $\overrightarrow{x(t)}$ и $\overrightarrow{y(t)}$.

Замечание: В некоторых настройках (Сервис-Опции-Разделитель аргументов) SMathStudio вместо разделительного знака ; («точка с запятой») используется знак , («запятая»).

Итак, вы должны ввести:

$$z(x) := \mathrm{augment}\left(\overrightarrow{x(t)};\ \overrightarrow{y(t)}\right).$$

Чтобы увидеть на экране значения матрицы z(x), введите z(x)=. На экране появится:

$$z(x) = \begin{bmatrix} 0{,}9231 & -4{,}6154 \\ 0{,}92 & -4{,}5082 \\ 0{,}9168 & -4{,}4007 \\ 0{,}9134 & -4{,}2929 \\ 0{,}9097 & -4{,}1848 \\ 0{,}9059 & -4{,}0765 \\ 0{,}9018 & -3{,}9678 \\ 0{,}8974 & -3{,}8587 \\ 0{,}8927 & -3{,}7494 \\ 0{,}8877 & -3{,}6396 \\ 0{,}8824 & -3{,}5294 \\ 0{,}8766 & -3{,}4188 \\ 0{,}8705 & -3{,}3078 \\ 0{,}8639 & -3{,}1963 \\ 0{,}8567 & -3{,}0842 \\ 0{,}8491 & -2{,}9717 \\ 0{,}8408 & -2{,}8586 \\ 0{,}8318 & -2{,}7449 \\ 0{,}8221 & -2{,}6306 \\ 0{,}8115 & -2{,}5156 \\ 0{,}8 & -2{,}4 \\ 0{,}7875 & -2{,}2836 \\ 0{,}7738 & -2{,}1665 \\ & \vdots \end{bmatrix}$$

4. Выведите шаблон для построения двумерного графика и в нижнем левом углу шаблона введите z(x).

Получите график следующего вида (рисунок 2.13):

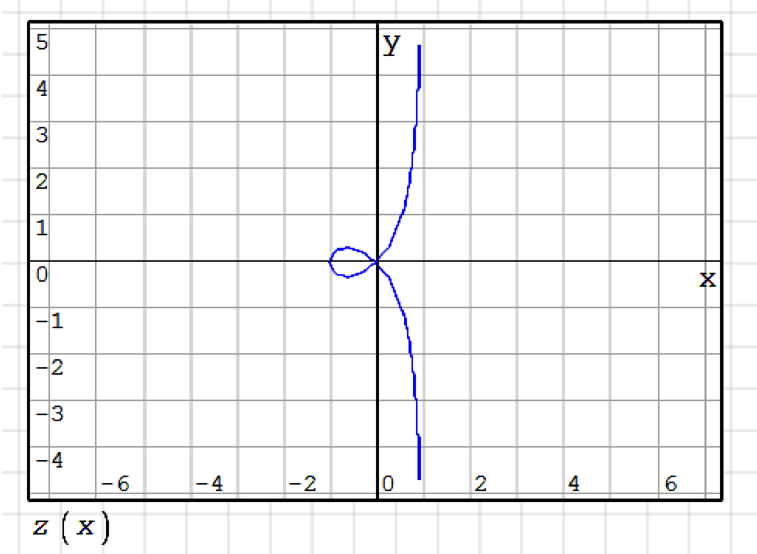


Рисунок 2.13 – График функции, заданной параметрическими уравнениями

3.3. Построение графиков в полярной системе координат

Полярная система координат состоит из оси, называемой полярной осью. Начало отсчёта на этой оси называется полюсом. Как правило, полярную систему координат рассматривают одновременно с прямоугольной декартовой системой координат, считая, что полярная ось совпадает с осью Ox. Положение любой точки M в полярных координатах определяется двумя числами: положительным числом $\rho = |OM|$ – полярным радиусом и числом φ, равным величине угла XOM – полярным углом. Числа ρ и φ называют полярными координатами точки M и записывают $M(\rho,\, \varphi)$.

Графики в полярной системе координат строятся аналогично графикам функций, заданных параметрически. Для этого необходимо перейти от полярных координат к декартовым:

$$\begin{cases} x = r(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \\ y = r(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \end{cases}.$$

Задание 10. В полярной системе координат постройте график функции $r(\varphi) = 3\cos 4\varphi$, для $\varphi \in [0;\ 2\pi]$ с шагом $\dfrac{\pi}{100}$.

Решение. 1. Задайте значения ранжированной переменной φ:

$$\varphi := \left[0\,;\,\frac{\pi}{100}\,..\,(2\cdot\pi)\right].$$

2. Определите функцию $r(\varphi)$:

$$r(\varphi) := 3\cdot\cos(4\cdot\varphi).$$

Чтобы увидеть значение функции $r(\varphi)$, «векторизуйте» её. Для этого выделите левой кнопкой мыши функцию $r(\varphi)$ и нажмите кнопку «векторизации» на боковой панели «Матрицы» (как мы делали в задании 5, стр. 39). Получите:

$$\overrightarrow{r(\varphi)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2{,}9763 \\ 2{,}9057 \\ 2{,}7893 \\ 2{,}6289 \\ 2{,}4271 \\ 2{,}1869 \\ 1{,}9123 \\ 1{,}6075 \\ 1{,}2773 \\ 0{,}9271 \\ 0{,}5621 \\ 0{,}1884 \\ -0{,}1884 \\ -0{,}5621 \\ -0{,}9271 \\ -1{,}2773 \\ -1{,}6075 \\ -1{,}9123 \\ -2{,}1869 \\ -2{,}4271 \\ -2{,}6289 \\ -2{,}7893 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

3. Определите функции X и Y:

$$X := r(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$$
$$Y := r(\varphi) \cdot \sin(\varphi)$$
.

Аналогично «векторизуйте» функции X и Y, чтобы увидеть их значения:

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2,9749 \\ 2,9 \\ 2,777 \\ 2,6082 \\ 2,3972 \\ 2,1482 \\ 1,8662 \\ 1,557 \\ 1,2266 \\ 0,8817 \\ 0,5289 \\ 0,1751 \\ -0,1729 \\ -0,5086 \\ -0,826 \\ -1,1193 \\ -1,3836 \\ -1,6146 \\ -1,8087 \\ -1,9635 \\ -2,0773 \\ -2,1492 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad \vec{Y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0935 \\ 0,1825 \\ 0,2625 \\ 0,3295 \\ 0,3797 \\ 0,4098 \\ 0,4171 \\ 0,3998 \\ 0,3564 \\ 0,2865 \\ 0,1904 \\ 0,0693 \\ -0,0748 \\ -0,2393 \\ -0,4209 \\ -0,6154 \\ -0,8183 \\ -1,0246 \\ -1,2292 \\ -1,4266 \\ -1,6113 \\ -1,778 \\ \vdots \end{bmatrix}$$
.

4. Для построения графика объедините столбцы $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ в одну матрицу *f*(x) с помощью оператора:

$$f(x) := \text{augment}(\vec{X}; \vec{Y})$$
.

5. Выведите шаблон для построения двумерного графика и в нижнем левом углу шаблона введите *f* (x).

Получите график вида (рисунок 2.14):

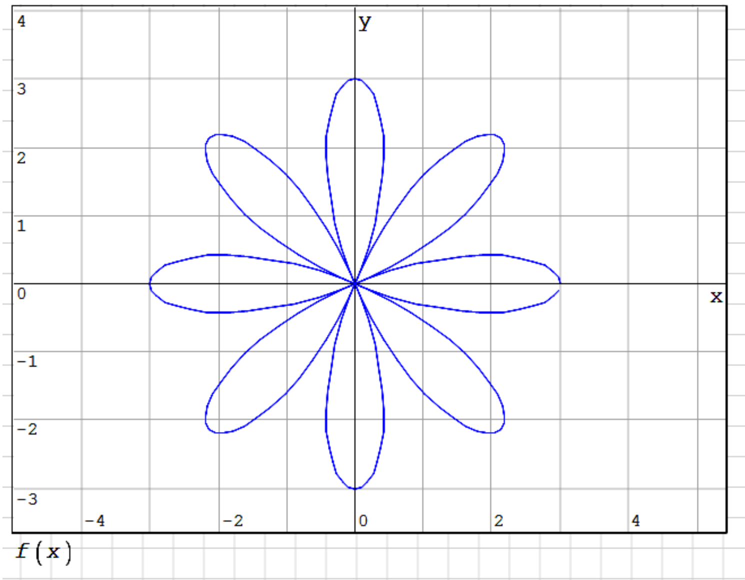


Рисунок 2.14 – График функции $r(\varphi) = 3\cos 4\varphi$

3.4. Построение поверхностей

SMathStudio обладает возможностями построения графиков в трехмерном пространстве.

Переменная величина z является **функцией двух переменных** x и y, если каждой упорядоченной паре переменных x и y соответствует одно значение величины z. При этом переменные x и y называют **аргументами** функции z = f(x,y).

Геометрическая интерпретация поверхности есть график функции двух переменных z(x, y). Каждая точка, лежащая на поверхности, имеет три координаты (x, y, z).

Для построения графика функции $z = f(x, y)$ необходимо выполнить следующие действия:

1. Набрать имя функции двух переменных, например $z(x; y)$, затем знак присвоения: = и, затем, выражение функции.

2. Установить курсор в то место, где вы хотите построить график.

3. В главном меню выбрать **Вставка → График→Трёхмерный**.

4. В появившемся шаблоне графика в нижнем левом углу (поле имени функции) ввести имя функции $z(x;y)$.

5. «Щёлкнуть» мышью вне шаблона графика или нажать кнопку Enter.

Задание 11. Постройте график функции $z(x,y) = y^2 - x^2$.

Решение. 1. Задайте функцию:

$$z(x;y) := y^2 - x^2$$.

2. Выведите шаблон графика поверхности (выбрав в главном меню **Вставка → График→Трёхмерный)** и в поле ввода шаблона наберите имя функции $z(x;y)$.

На экране должен появиться график (рисунок 2.15):

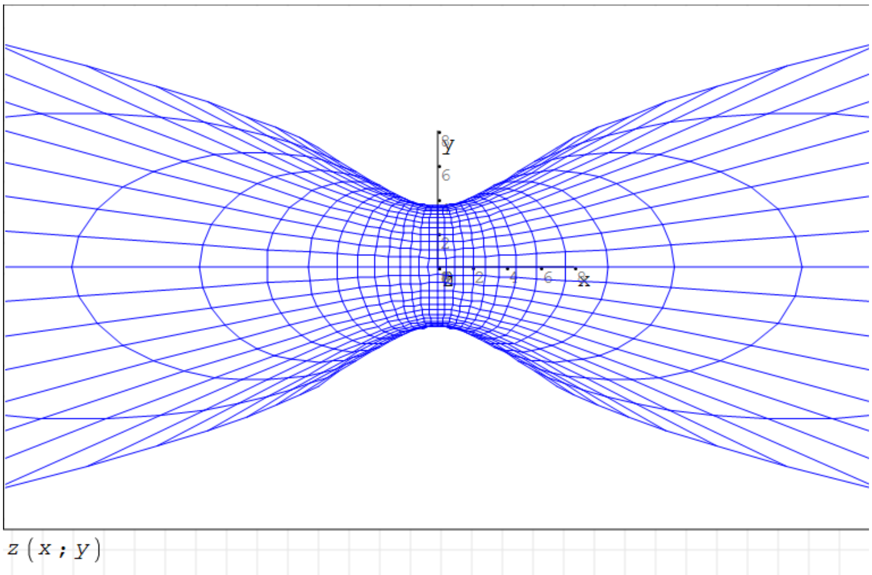


Рисунок 2.15 – График функции $z(x,y) = y^2 - x^2$

4. Форматирование графиков

4.1. Изменение размеров графического блока

Для изменения размеров графического блока используют три маркера, появляющихся, если «щёлкнуть» левой кнопкой мыши на области шаблона графика (рисунок 2.16):

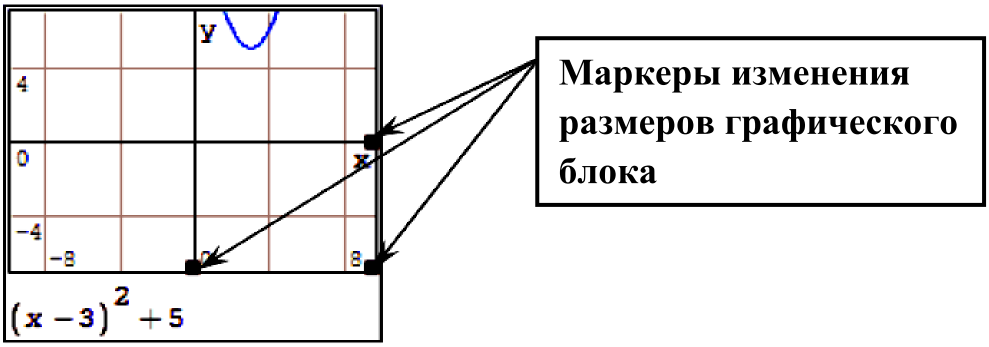


Рисунок 2.16 – Иллюстрация изменения размеров графического блока

4.2. Перемещение области графического блока

Чтобы переместить область графического блока, необходимо навести курсор на границу области, появится «крестик». Потянув за него, переместите область графика в нужное место.

4.3. Форматирование графиков с помощью панели «График»

Для форматирования графиков используют инструменты панели «График» (рисунок 2.17):

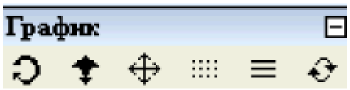


Рисунок 2.17 – Вид панели «График»

Панель «График» содержит шесть кнопок для работы с графиками:

 – «Вращение» – позволяет вращать мышкой 3D-график.

 – «Масштабирование» – позволяет масштабировать график (менять масштаб по осям). Это можно делать колесиком мышки. В 2D-графиках для изменения масштаба только по оси X удерживайте клавишу Shift и крутите колёсико мышки, для оси Y – клавишу Ctrl.

 – «Перемещение» – позволяет перемещать изображение внутри графика.

 – «График точками» – включает режим отображения графиков точками.

 – «График линиями» – включает режим отображения графиков линиями.

 – позволяет вернуть исходное положение графика.

На рисунке 2.18 приведены виды отображения графиков линиями и точками:

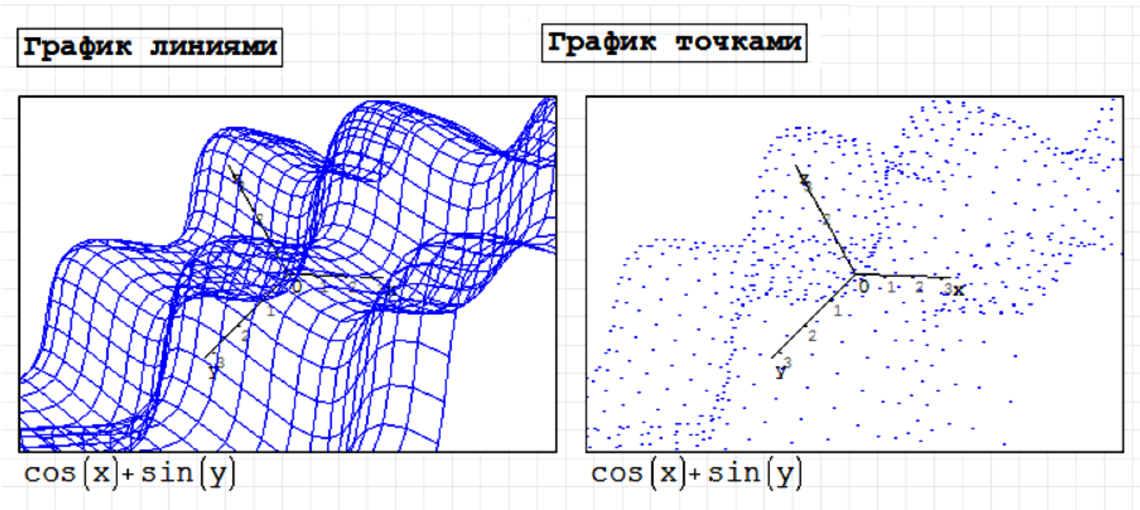


Рисунок 2.18 – Виды отображения графиков линиями и точками

На рисунке 2.19 приведены результаты масштабирования графиков:

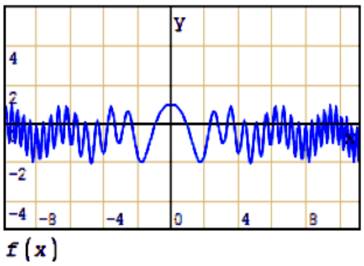
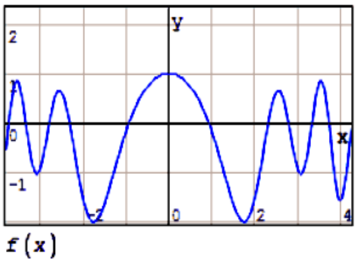
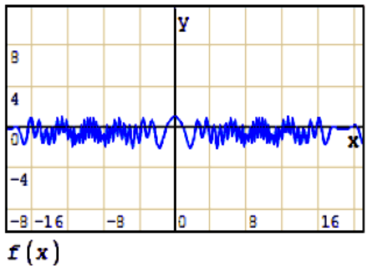
Исходный график интервал [-10;10]	Увеличенное изображение интервал [-4;4]	Уменьшенное изображение интервал [-20;20]
		

Рисунок 2.19 – Примеры масштабирования графиков

На рисунке 2.20 приведены результаты перемещения графика внутри графического блока:

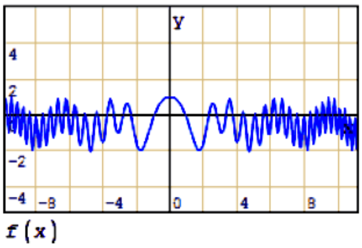
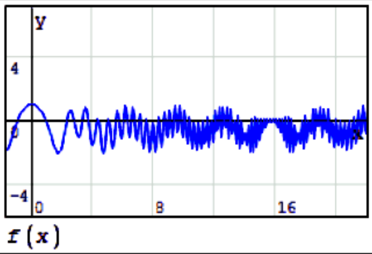
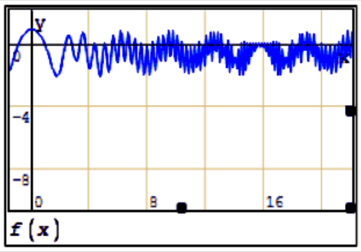
Исходный график	Перемещение вправо	Перемещение вверх
		

Рисунок 2.20 – Примеры перемещения графика внутри графического блока

4.4. Отображение сетки и осей

По умолчанию на графике отображаются оси и сетка. Для отключения сетки и осей «щёлкните» на области графика, построенного в Задании 9 (рисунок 2.13, стр. 51) вначале левой кнопкой мыши (активизировав область), затем ещё раз, но уже правой кнопкой мыши, чтобы вызвать контекстное меню (рисунок 2.21):

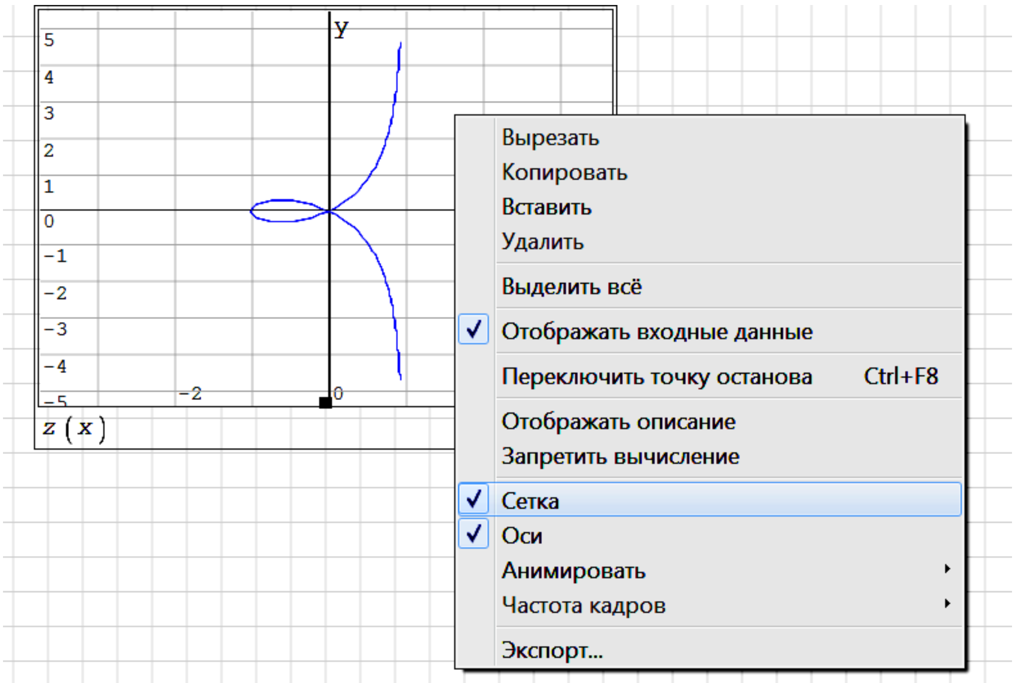


Рисунок 2.21 – Контекстное меню для отключения сетки и осей

«Щёлкнув» по опции «Сетка», уберите галочку .

Вы получите рисунок без линий сетки (рисунок 2.22):

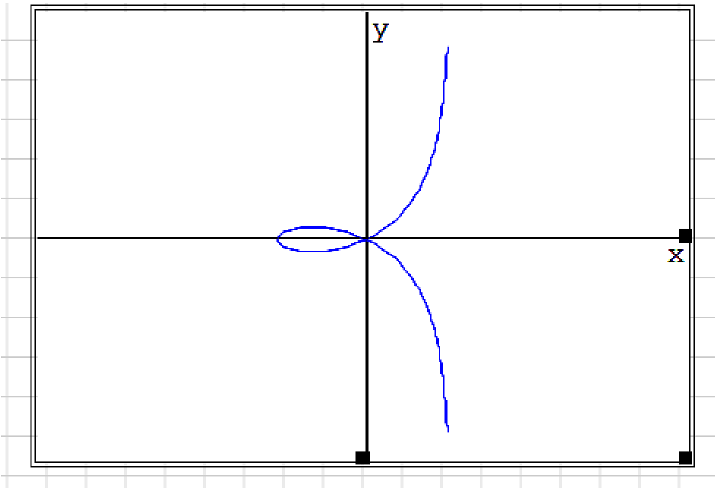


Рисунок 2.22 – Вид графика без линий сетки

Чтобы вернуть сетку, проделайте повторно те же действия, установив галочку обратно.

Аналогично можно убрать (и вернуть обратно) оси.

График без осей и сетки имеет вид (рисунок 2.23):

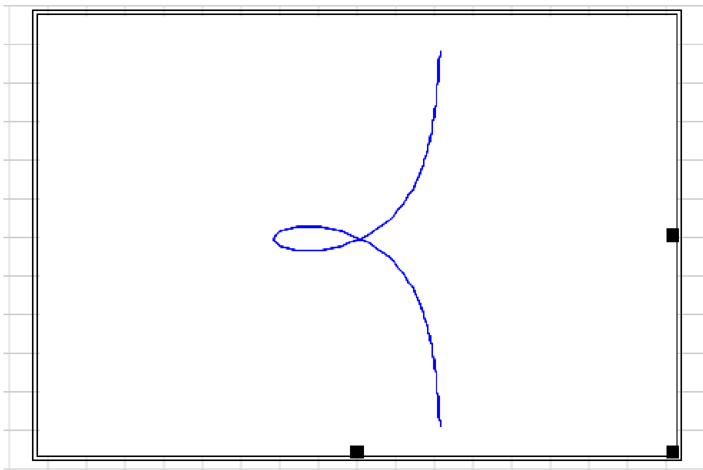


Рисунок 2.23 – Вид графика без линий сетки и координатных осей

Контрольные вопросы

1. Как определить ранжированную переменную в SMathStudio?
2. Назовите два основных класса функций, используемых в SMathStudio.
3. Какие типы графиков можно построить в SMathStudio?
4. Как построить график функции в декартовой системе координат на плоскости?

5. Какой способ построения графика функции в SMathStudio называется быстрым?

6. Как в одном шаблоне разместить несколько графиков?

7. Как построить график функции, заданной в параметрической форме?

8. Как построить график функции в полярной системе координат?

9. Как «векторизовать» функцию в SMathStudio?

10. Перечислите действия, необходимые для построения поверхности в SMathStudio.

11. Как изменить размер графического блока?

12. Какую панель инструментов используют для форматирования графиков в SMathStudio?

13. Что нужно сделать, чтобы отключить сетку и оси на графике?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Действия над матрицами, решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в SMathStudio

Цель работы: Научиться применять функционал SMathStudio при работе с матрицами и определителями: складывать, вычитать, умножать матрицы, находить обратную и транспонированную матрицы, вычислять определители, решать системы линейных алгебраических уравнений.

1. Матрицы

Матрица A размера $m \times n$ представляет собой таблицу чисел, содержащую m строк и n столбцов.

Матрицу записывают в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – элементы матрицы А, $i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n$.

Матрицы принято обозначать большими латинскими буквами, а элементы матрицы – малыми латинскими буквами с двойными индексами. Первый индекс элемента обозначает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент.

Например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Здесь, $a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{21} = -3,\ a_{22} = 4$.

В SMathStudio данные, представленные в виде таблиц, в формате строк и столбцов, хранят в двумерных массивах, которые имеют вид матриц. Для доступа к элементам двумерного массива указывают имя этого массива и два индекса. Первый определяет номер строки, второй – номер столбца.

Матрицы будем задавать путем ввода их элементов. Индексы элемента нужно вводить при помощи символа прямой открывающейся скобки [после имени элемента. При вводе индексов элементов матрицы первый индекс от второго отделяется символом ; (точка с запятой).

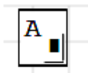
Замечание:

В отличие от принятых в математике обозначений, в SMathStudio элементы матрицы необходимо задавать буквой того же размера, что и сама матрица. Так, если имя матрицы задано прописной (большой) буквой A, то и элементы необходимо задавать прописными буквами A_{11}, A_{12} и так далее, а если имя матрицы задано строчной (малой) буквой a, то и элементы необходимо задавать строчными буквами a_{11}, a_{12} и так далее.

Задание 1. Задайте матрицу $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6{,}3 \end{pmatrix}$ поэлементно.

Решение. 1. Задайте элементы матрицы, присваивая соответствующие значения. Для этого наберите A, затем символ прямой открывающейся скобки [.

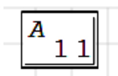
При этом курсор сместится вниз:



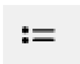
.

Введите номер строки 1, затем разделительный символ ; (точка с запятой) и затем номер столбца 1.

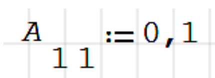
На экране появится:



.

Нажмите знак присвоения 

и введите значение первого элемента матрицы 0,1:



.

2. Аналогично задайте остальные элементы матрицы:

$$A_{1\,2} := 2$$
$$A_{1\,3} := 3$$
$$A_{2\,1} := 4$$
$$A_{2\,2} := 5$$
$$A_{2\,3} := -6,3$$
.

3. Выведите матрицу А, для этого наберите:

А=.

На экране появится:

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6,3 \end{bmatrix}$$
.

Замечание:

Если в матрице определены не все элементы, то при выводе её на экран каждому незаданному элементу будет по умолчанию присвоено нулевое значение.

Задание 2. Задайте матрицу $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3{,}6 & 0 & -1{,}9 \end{pmatrix}$.

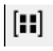
Решение. 1. Задайте элементы:

$$B_{1\,1} := -3$$
$$B_{1\,2} := -1$$
$$B_{2\,1} := 3,6$$
$$B_{2\,3} := -1,9$$
.

2. Наберите B=. Получите матрицу:

$$B = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 3,6 & 0 & -1,9 \end{bmatrix}$$
,

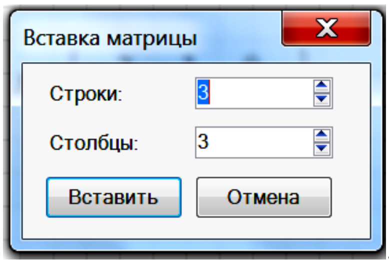
где незаданные элементы B_{13} и B_{22} равны нулю.

Чтобы задать матрицу, можно также использовать боковую панель «Матрицы» (рисунок 3.1), выбрав «кнопку» :

.

Рисунок 3.1 – Вид боковой панели «Матрицы»

На экране появится окно (рисунок 3.2):

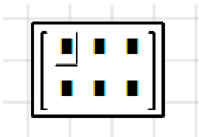


.

Рисунок 3.2 – Окно «Вставка матрицы»

В этом окне необходимо ввести требуемое количество строк и столбцов.

Если, например, ввести количество строк 2, а количество столбцов 3, то появится шаблон:



.

Далее вводим элементы матрицы.

Также матрицу можно задать через верхнюю панель SMathStudio, выбрав **Вставка-Матрица,** или нажав комбинацию клавиш **Ctrl+M** (рисунок 3.3):

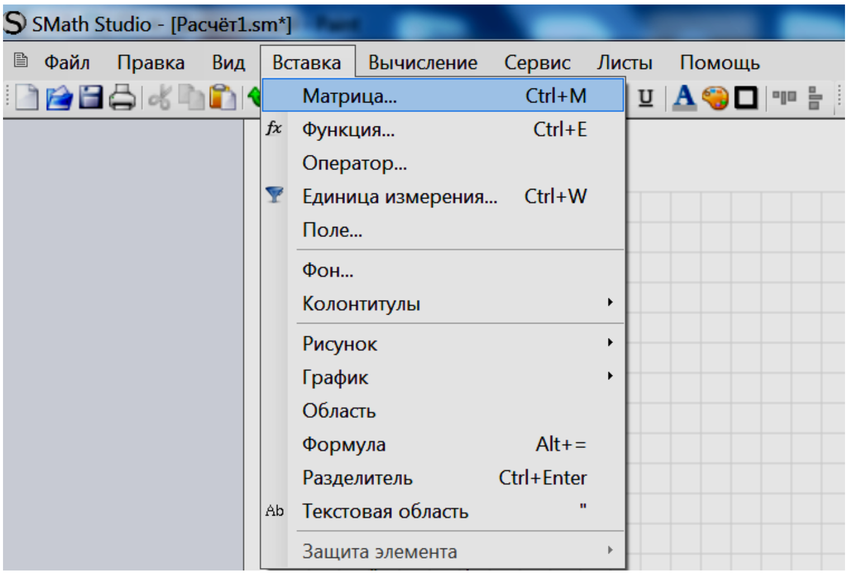
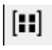


Рисунок 3.3 – Способ задания матрицы с использованием верхней панели

Задание 3. Задайте с помощью шаблона матрицу $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2{,}5 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. 1. Введите имя матрицы C и нажмите символ присвоения :=.

Одним из вышеперечисленных способов (например, выбрав «кнопку»  на боковой панели «Матрицы») выведите на экран окно (рисунок 3.4):

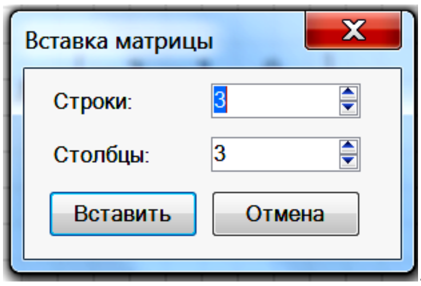
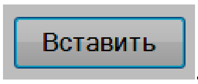
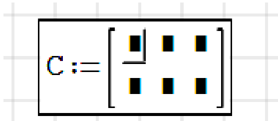


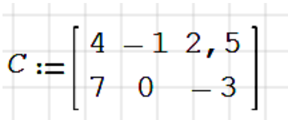
Рисунок 3.4 – Один из способов вставки матрицы

2. Задайте количество строк 2, количество столбцов 3 и нажмите 
.

На экране появился шаблон:



3. Введите элементы матрицы:



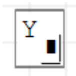
Замечание 3. Чтобы задать матрицу поэлементно, можно вместо символа [использовать боковую панель «Матрицы» (рисунок 3.5), выбрав «кнопку»  или .

Рисунок 3.5 – Вставка матрицы через боковую панель «Матрицы»

При этом кнопка  позволяет вводить элементы вектор-столбца (с одним индексом, например y_1, y_2, y_3), а кнопка  – элементы матрицы любого размера.

Задание 4. Задайте поэлементно вектор-столбец $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Решение. 1. Задайте элементы матрицы, присваивая соответствующие значения. Для этого наберите Y, затем нажмите кнопку  боковой панели «Матрицы». При этом курсор сместится вниз:



Введите индекс 1, затем клавишу «пробел» (чтобы подчеркнуть всё выражение) и нажмите знак присвоения :=. Введите значение первого элемента 2:

$$Y_1 := 2.$$

2. Аналогично задайте остальные элементы матрицы:

$$Y_2 := -3$$

$$Y_3 := 5.$$

3. Выведите матрицу Y, для этого наберите Y= . На экране появится:

$$Y = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

2. Основные операции над матрицами.
Определители квадратных матриц

Из курса линейной алгебры известно, что к линейным операциям над матрицами относятся две операции:

– сложение матриц;

– умножение матрицы на число.

Кроме линейных операций вводятся операции:

– умножение матриц;

– транспонирование матрицы;

– построение обратной матрицы к данной.

Для квадратной матрицы вводится понятие *определителя*.

SMathStudio позволяет выполнять с матрицами все указанные операции: сложение, умножение на число, умножение матриц, операции транспонирования, обращения, вычисление определителя матрицы.

Задание 5. Выполните действие $A+B$, если

$$A=\begin{pmatrix} 3{,}7 & -1{,}5 & 4 \\ 9 & 13 & 5 \\ -1{,}4 & 3{,}2 & 15 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1{,}9 & 13 & -1{,}2 \\ 3 & 5 & -7{,}9 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. Введите матрицы A и B любым ранее рассмотренным способом:

$$A:=\begin{bmatrix} 3{,}7 & -1{,}5 & 4 \\ 9 & 13 & 5 \\ -1{,}4 & 3{,}2 & 15 \end{bmatrix},$$

$$B:=\begin{bmatrix} 1{,}9 & 13 & -1{,}2 \\ 3 & 5 & -7{,}9 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Введите:

$$A+B=.$$

На экране должно отобразиться следующее:

$$A+B=\begin{bmatrix} 5{,}6 & 11{,}5 & 2{,}8 \\ 12 & 18 & -2{,}9 \\ 0{,}6 & 4{,}2 & 15 \end{bmatrix}.$$

Задание 6. Выполните действия $2\cdot C-3\cdot D$, если

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 13 \\ -14 & 2 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 7 & -21 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. Задайте матрицы C и D:

$$C := \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ -14 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D := \begin{bmatrix} 7 & -21 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}.$$

2. Введите:

$$2 \cdot C - 3 \cdot D =$$

На экране должно отобразиться следующее:

$$2 \cdot C - 3 \cdot D = \begin{bmatrix} -11 & 89 \\ -37 & -35 \end{bmatrix}.$$

Задание 7. Вычислите произведение матриц $M \cdot N$, если

$$M = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 2{,}5 & 13 \\ 7{,}2 & -4 & 9{,}1 & 15 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 \\ -2 & 3{,}4 \\ 0 & 2{,}7 \\ 3 & 5{,}9 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1. Введите матрицы M и N:

$$M := \begin{bmatrix} 10 & -2 & 2{,}5 & 13 \\ 7{,}2 & -4 & 9{,}1 & 15 \end{bmatrix},$$

$$N := \begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 \\ -2 & 3{,}4 \\ 0 & 2{,}7 \\ 3 & 5{,}9 \end{bmatrix}.$$

2. Введите:

$$M \cdot N =$$

На экране должно отобразиться следующее:

$$M \cdot N = \begin{bmatrix} 48 & 86{,}65 \\ 56{,}6 & 106{,}67 \end{bmatrix}.$$

Замечание:

При выполнении операций над матрицами следует помнить основные свойства этих операций:

– складывать можно только матрицы одного размера;

– умножение двух матриц $A \cdot B$ возможно лишь в том случае, если число элементов в строке первой матрицы равно числу элементов в столбце второй матрицы;

– квадратная матрица имеет обратную тогда и только тогда, когда её определитель отличен от нуля;

– для обратной матрицы выполняются равенства

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E,$$

где

$$E = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0.........0 \\ 0\ 1\ 0.........0 \\ 0\ 0\ 1.........0 \\ .... \\ 0\ 0\ 0.........1 \end{pmatrix} \text{ – единичная матрица;}$$

– понятие определителя вводится только для квадратной матрицы.

Операцию транспонирования матрицы, а также вычисление определителя квадратной матрицы выполняют с помощью кнопок боковой панели «Матрицы»:

.

Рисунок 3.6 – Транспонирование матриц с помощью боковой панели «Матрицы»

Транспонирование матрицы осуществляется кнопкой . Для этого необходимо вначале задать матрицу, например А. Затем «щёлкнуть» по кнопке  и ввести в поле ввода имя матрицы.

Вычисление ***определителя*** квадратной матрицы выполняют с помощью кнопки .

Задание 8. Для матрицы $D = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 3{,}1 & 5{,}7 \\ 4{,}3 & 1{,}2 & -2{,}7 \\ 5{,}3 & 6{,}1 & 7{,}6 \end{pmatrix}$ найдите D^T. Вычислите определитель матрицы D.

Решение. 1. Введите матрицу D:

$$D := \begin{bmatrix} 1,2 & 3,1 & 5,7 \\ 4,3 & 1,2 & -2,7 \\ 5,3 & 6,1 & 7,6 \end{bmatrix}.$$

2. Чтобы найти транспонированную матрицу D^T, на боковой панели «Матрицы» «щёлкните» по кнопке . В поле ввода имени матрицы введите D и в конце выражения нажмите знак равенства.

На экране должно отобразиться:

$$D^T = \begin{bmatrix} 1,2 & 4,3 & 5,3 \\ 3,1 & 1,2 & 6,1 \\ 5,7 & -2,7 & 7,6 \end{bmatrix}$$

3. Чтобы вычислить определитель матрицы D, на боковой панели «Матрицы» «щёлкните» по кнопке . В поле ввода имени матрицы введите D и в конце выражения нажмите знак равенства.

На экране должно отобразиться:

$$|D| = -1,702.$$

Построение ***обратной матрицы*** к данной осуществляется с помощью боковой панели «Арифметика», с использованием кнопки .

Здесь в нижнем поле вводится имя матрицы, а в верхнем поле вводится значение -1, например A^{-1}.

Задание 9. Для матрицы $D = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 3{,}1 & 5{,}7 \\ 4{,}3 & 1{,}2 & -2{,}7 \\ 5{,}3 & 6{,}1 & 7{,}6 \end{pmatrix}$, определенной в Задании 8, найдите обратную матрицу D^{-1}. Сделайте проверку для обратной матрицы (то есть убедитесь, что $D^{-1} \cdot D = D \cdot D^{-1} = E$).

Решение. 1. Матрица D у вас уже задана при выполнении Задания 8.

Чтобы найти обратную матрицу D^{-1}, на боковой панели «Арифметика» нажмите кнопку . В нижнем поле введите имя матрицы D, в верхнем поле введите -1 и в конце выражения нажмите знак равенства.

На экране должно отобразиться:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} -15{,}0353 & -6{,}5864 & 8{,}9365 \\ 27{,}6087 & 12{,}3913 & -16{,}3043 \\ -11{,}6745 & -5{,}3525 & 6{,}9859 \end{bmatrix}.$$

2. Сделайте проверку: вычислите $D^{-1} \cdot D$ и $D \cdot D^{-1}$. В результате должны получиться единичные матрицы:

$$D \cdot D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Решение систем линейных уравнений

В разделе «Линейная алгебра» рассматривается задача отыскания решения системы m линейных уравнений относительно n неизвестных.

В общем случае система записывается в виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

где a_{ij} называются коэффициентами системы (1), x_i – неизвестными, b_j – свободными членами, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$.

В случае, если число уравнений m равно числу неизвестных n, единственное решение системы можно найти по формулам Крамера или матричным методом.

3.1. Метод Крамера

Рассмотрим систему n уравнений относительно n неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим через А – матрицу, составленную из коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если определитель $\Delta = |A|$ отличен от нуля, то система (2) имеет единственное решение (x_1, x_2, …, x_n), где

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \tag{3}$$

Δ_i – определитель матрицы, полученной из матрицы А заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

Разберите решение системы линейных уравнений методом Крамера на следующем примере.

Задание 10. Решите методом Крамера систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -7, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение. 1. Введите матрицу A, составленную из коэффициентов системы:

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Вычислите её определитель $|A|$, обозначив его через Δ:

$$\Delta := |A|.$$

Символ Δ можно ввести с боковой панели «Символы» (рисунок 3.7):

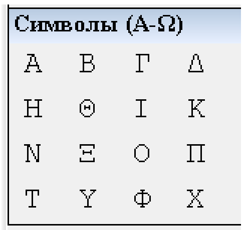


Рисунок 3.7 – Вид боковой панели «Символы»

3. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Выведите на экран значение Δ, набрав $\Delta =$:

$$\Delta = 35.$$

4. Сформируйте три матрицы: *A1* получена из матрицы A заменой 1-го столбца на столбец свободных членов системы, то есть правых частей уравнений системы:

$$A1 := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ -7 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Матрица *A2* получена из матрицы A заменой 2-го столбца на столбец свободных членов системы, то есть правых частей уравнений системы:

$$A2 := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -7 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Матрица *A3* получена из матрицы *A* заменой 3-го столбца на столбец свободных членов системы, то есть правых частей уравнений системы:

$$A3 := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Вычислите определители этих матриц $|A1|$, $|A2|$, $|A3|$, обозначив их через $\Delta 1$, $\Delta 2$ и $\Delta 3$ соответственно:

$$\Delta 1 := |A1|,$$

$$\Delta 2 := |A2|,$$

$$\Delta 3 := |A3|.$$

6. Выведите полученные значения на экран, набрав $\Delta 1$=, $\Delta 2$= и $\Delta 3$=:

$$\Delta 1 = -70,$$

$$\Delta 2 = -35,$$

$$\Delta 3 = 70.$$

7. Найдите решение системы по формулам (3):

$$x1 := \frac{\Delta 1}{\Delta},$$

$$x2 := \frac{\Delta 2}{\Delta},$$

$$x3 := \frac{\Delta 3}{\Delta}.$$

8. Выведите значения *x1*, *x2*, *x3* на экран, набрав *x1*=, *x2*=, *x3*=. У вас должно получиться:

$$x1 = -2,$$

$$x2 = -1,$$

$$x3 = 2.$$

Ответом является тройка чисел (–2, –1, 2).

3.2. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Рассмотрим еще один метод решения систем линейных уравнений. Его называют матричным способом.

Для системы, содержащей n уравнений относительно n неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

введем следующие матрицы:

– квадратную матрицу А порядка $n \times n$, составленную из коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

– матрицу-столбец X, составленную из неизвестных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},$$

– матрицу-столбец, состоящую из свободных членов системы:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему в матричном виде можно записать в виде:

$$A \cdot X = B.$$

Отсюда

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{4}$$

По этой формуле можно найти неизвестную матрицу-столбец X, элементы которой дают значения неизвестных x_1, x_2, …, x_n.

Разберите матричный метод решения системы на примере.

Задание 11. Решите матричным методом систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 22, \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -8, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 8, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение. 1. Составьте матрицу A из коэффициентов, стоящих перед неизвестными:

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Составьте матрицу B из свободных членов системы:

$$B := \begin{bmatrix} 22 \\ -8 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

3. Введите формулу (4) для вычисления X:

$$X := A^{-1} \cdot B.$$

4. Выведите значения неизвестных, набрав *X*=

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Значит, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = –5$. Ответом является четверка чисел (2, 1, 0, –5).

Контрольные вопросы

1. Как задать матрицу в SMathStudio?
2. Как в SMathStudio сложить (вычесть) матрицы?
3. Как умножить матрицу на число в SMathStudio?
4. Как в SMathStudio найти произведение двух матриц?
5. Как в SMathStudio найти матрицу, обратную заданной?
6. С помощью какой панели инструментов SMathStudio выполняется транспонирование матрицы?
7. Как найти определитель квадратной матрицы в SMathStudio?
8. Опишите шаги выполнения метода Крамера решения СЛАУ в SMathStudio.
9. Опишите алгоритм реализации матричного метода решения СЛАУ в SMathStudio.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Выполнение операций над векторами и комплексными числами в SMathStudio

Цель работы: Изучить возможности SMathStudio при работе с векторами и комплексными числами: выполнять действия над векторами и комплексными числами в SMathStudio и применять их в решении прикладных задач.

1. Векторы

Раздел высшей математики «Векторная алгебра» изучает векторы, основные операции над векторами, свойства этих операций. В этом разделе рассматриваются различные математические и физические задачи, для решения которых привлекаются методы векторной алгебры.

Каждому вектору на плоскости можно поставить в соответствие упорядоченную пару чисел $(a_1; a_2)$, а в пространстве – упорядоченную тройку чисел $(a_1; a_2; a_3)$, которую называют координатами этого вектора. Тот факт, что вектор $\overline{a}$ имеет координаты, записывают в виде:

$$\vec{a} = (a_1; a_2) \text{ на плоскости,}$$

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \text{ в пространстве.}$$

Над векторами вводятся следующие операции:

1. Линейные операции: сложение векторов и умножение вектора на число.

2. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которое обозначается:

$$\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

3. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, которое обозначается:

$$\vec{a} \times \vec{b}.$$

4. Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, которое обозначается:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \text{ или } \vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

В лабораторной работе № 3 нами были рассмотрены матрицы в SMath-Studio. Матрица представляет собой таблицу чисел. Каждый элемент таблицы занумерован двумя индексами.

Вектор в SMathStudio рассматривают как матрицу, состоящую из одного столбца. Такую матрицу называют матрицей-столбцом.

Соответственно с этим, чтобы записать вектор поэлементно, нужно задать все элементы матрицы-столбца.

Как и в случае матриц произвольного размера, элементы вектора (матрицы-столбца) обозначаются той же буквой, что и сама матрица. В силу этого, привычное в математике обозначение одной малой латинской буквой со стрелкой не применяется.

В SMathStudio вектор $\vec{a}$, имеющий координаты $(a_1; a_2; a_3)$, будет записан в виде:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Для обозначения вектора можно применять и прописные буквы. Тогда вектор будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

Замечание: В лабораторной работе № 3 элементы матрицы мы обозначали той же буквой, что и матрица, но обязательно указывали два индекса. Элементы вектора также можно нумеровать двумя индексами, рассматривая их как частный случай матрицы, имеющей один столбец.

Но можно использовать только первый индекс, т.к. второй индекс не меняется.

Например:

$$A_{1\,1} := 3$$

$$A_{2\,1} := -4$$

$$A_{3\,1} := 5$$

или

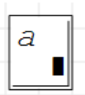
$$A_1 := 3$$
$$A_2 := -4$$
$$A_3 := 5$$
.

Рассмотрим на примере ***поэлементное*** задание вектора.

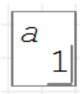
Задание 1. Задайте вектор $\vec{a} = (2; -3; 4)$ поэлементно.

Решение. 1. Задайте элементы вектора, присваивая соответствующие значения. Для этого наберите *a*, затем символ прямой открывающейся скобки [.

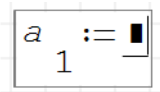
При этом курсор сместится вниз:


.

Введите индекс 1. На экране появится:


.

Нажмите клавишу «пробел» и знак присвоения :=



и введите значение первой координаты вектора 2:

$$a_1 := 2$$
.

2. Аналогично задайте остальные элементы матрицы:

$$a_2 := -3$$
$$a_3 := 4$$
.

3. Выведите полученный вектор на экран, нажав a=, получите:

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$
.

Вектор также можно задать с помощью боковой панели «Матрицы», выбрав «кнопку»  (рисунок 4.1):

Рисунок 4.1 – Задание вектора с помощью боковой панели «Матрицы»

На экране появится окно (рисунок 4.2):

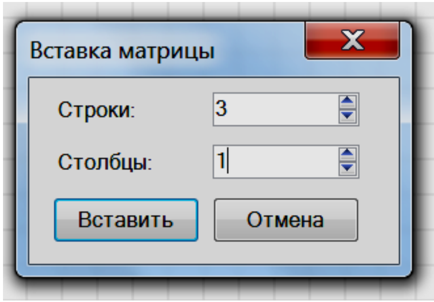


Рисунок 4.2 – Вид окна «Вставка матрицы»

В этом окне необходимо ввести количество строк 3 и столбцов 1.

На этой же панели есть кнопка , с помощью которой можно найти *векторное произведения* векторов.

Замечание. Чтобы найти *скалярное произведение* векторов, применяют символ умножения * с клавиатуры или символ  боковой панели «Арифметика» (рисунок 4.3):

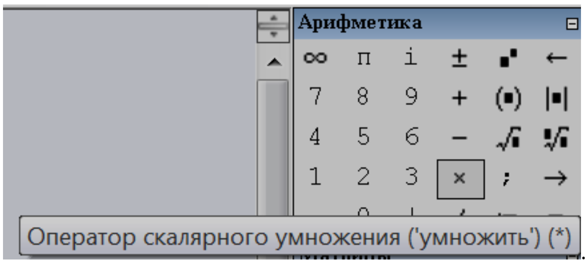
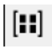


Рисунок 4.3 – Оператор скалярного умножения на панели «Арифметика»

Задание 2. Найдите скалярное и векторное произведения векторов $\vec{a}=(4;\ \ 3;\ \ -7)$ и $\vec{b}=(5;\ \ -6;\ \ 2)$.

Решение. 1. Задайте векторы с помощью боковой панели «Матрицы». Для этого введите:

a:=

затем нажмите «кнопку»  на боковой панели «Матрицы», в появившемся окне введите количество строк 3 и столбцов 1.

На экране появится шаблон:

$$a := \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}.$$

Введите координаты вектора $\vec{a} = (4;\quad 3;\quad -7)$:

$$a := \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Аналогично задайте вектор $\vec{b} = (5;\quad -6;\quad 2)$:

$$b := \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

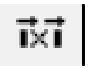
2. Чтобы найти скалярное произведения векторов, введите:

$$a \cdot b$$

и нажмите «равно».

Получите:

$$a \cdot b = -12.$$

3. Чтобы найти векторное произведения векторов, используйте кнопку  боковой панели «Матрицы». На месте чёрных квадратиков введите имена векторов:

$$a \times b$$

и нажмите «равно».

Получите:

$$a \times b = \begin{bmatrix} -36 \\ -43 \\ -39 \end{bmatrix}.$$

Замечания:

1. *Смешанное произведение* трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ можно найти, используя определение, то есть по формуле

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}.$$

2. Если известны координаты векторов $\bar{a}=(a_1;\ a_2;\ a_3)$, $\bar{b}=(b_1;\ b_2;\ b_3)$, $\bar{c}=(c_1;\ c_2;\ c_3)$, то *смешанное произведение* $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ можно вычислить по формуле

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Задание 3. Найдите смешанное произведение трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если $\vec{a}=(2;\ -1;\ 9)$, $\vec{b}=(5;\ -20;\ 4)$, $\vec{c}=(9;\ -4;\ 12)$.

Решение. 1. Задайте векторы:

$$a:=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad b:=\begin{bmatrix} 5 \\ -20 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad c:=\begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

2. С помощью кнопки боковой панели «Матрицы» введите

$$a\times b,$$

затем нажмите *c, получите:

$$a\times b\cdot c.$$

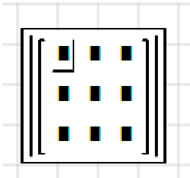
Нажмите знак равенства =, получите:

$$a\times b\cdot c=1016.$$

3. Вычислите теперь смешанное произведение:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 5 & -20 & 4 \\ 9 & -4 & 12 \end{vmatrix}.$$

Для этого нажмите кнопку вычисления определителей боковой панели «Матрицы», затем кнопку этой же панели, подтвердите размер матрицы 3×3 (строк – 3, столбцов – 3). На экране отобразится шаблон:


.

Введите определитель и нажмите «равно». Получите:

$$\left|\begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 5 & -20 & 4 \\ 9 & -4 & 12 \end{bmatrix}\right| = 1016 .$$

Убедитесь, что результаты вычислений смешанного произведения двумя способами совпадают.

Линейные операции: *сложение (вычитание)* двух векторов $\vec{a}+\vec{b}\,(\vec{a}-\vec{b})$ и *умножение вектора на число* проводятся в SMathStudio с помощью боковой панели «Арифметика» или с кнопок клавиатуры плюс + (минус –), умножить *.

Замечание.

Для вычисления *длины вектора* $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ используйте формулу

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}\ . \qquad (5)$$

Задание 4. Выполните действия $2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$, если $\vec{a}=(5;\ \ 9;\ \ 14)$, $\vec{b}=(-1;\ \ 4;\ \ 3)$, $\vec{c}=(7;\ \ -2;\ \ 1)$.

Решение. 1. Введите векторы:

$$a := \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad c := \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

2. С помощью боковой панели «Арифметика» или используя кнопки клавиатуры +, –, * введите выражение

$$2 \cdot a + b - 3 \cdot c$$

и нажмите знак равенства =, получите:

$$2 \cdot a + b - 3 \cdot c = \begin{bmatrix} -12 \\ 28 \\ 28 \end{bmatrix}.$$

Задание 5. Найдите значение выражения $3|\vec{a}| - 5|\vec{b}| + 7|\vec{c}|$, если $\vec{a} = (5;\ \ 1;\ \ -4)$, $\vec{b} = (2;\ \ -2;\ \ 4)$, $\vec{c} = (3;\ \ 2;\ \ -1)$.

Решение. 1. В этом задании удобно задать векторы *поэлементно* (как мы делали в Задании 1, стр. 80), то есть:

$$a_1 := 5 \quad a_2 := 1 \quad a_3 := -4,$$

$$b_1 := 2 \quad b_2 := -2 \quad b_3 := 4,$$

$$c_1 := 3 \quad c_2 := 2 \quad c_3 := -1.$$

2. Обозначьте длину вектора $\vec{a}$, то есть $|\vec{a}|$ через А; длину вектора $\vec{b}$, то есть $|\vec{b}|$ через В; длину вектора $\vec{c}$, то есть $|\vec{c}|$ через С и воспользуйтесь формулой (5) вычисления длины вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}.$$

Итак, вычислите:

$$A := \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}},$$

$$B := \sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + b_3^{\,2}},$$

$$C := \sqrt{c_1^{\ 2} + c_2^{\ 2} + c_3^{\ 2}}.$$

3. Чтобы найти значение выражения $3|\vec{a}| - 5|\vec{b}| + 7|\vec{c}|$, введите:

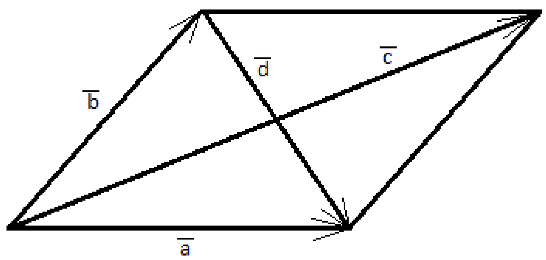
$$3 \cdot A - 5 \cdot B + 7 \cdot C$$

и нажмите знак равенства =, получите:

$$3 \cdot A - 5 \cdot B + 7 \cdot C = 21{,}1389.$$

Аппарат векторной алгебры используется для решения многих математических, физических и прикладных задач. В частности, его можно использовать при решении некоторых геометрических задач.

Задание 6. На векторах $\vec{a} = (5;\ \ 9;\ \ 14)$ и $\vec{b} = (-1;\ \ 4;\ \ 3)$ построен параллелограмм:



Найдите:

1. Периметр параллелограмма.
2. Векторы, являющиеся диагоналями параллелограмма.
3. Площадь параллелограмма.
4. Высоту параллелограмма.

Решение. 1. Для нахождения периметра нужно найти длины векторов $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$. Тогда периметр равен:

$$P = 2|\vec{a}| + 2|\vec{b}|. \qquad (6)$$

Введите векторы *поэлементно:*

$$a_1 := 5 \qquad a_2 := 9 \qquad a_3 := 14,$$

$$b_1 := -1 \qquad b_2 := 4 \qquad b_3 := 3.$$

Вычислите длины векторов, используя формулу (5):

$$A := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

$$B := \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},$$

и найдите периметр по формуле (6):

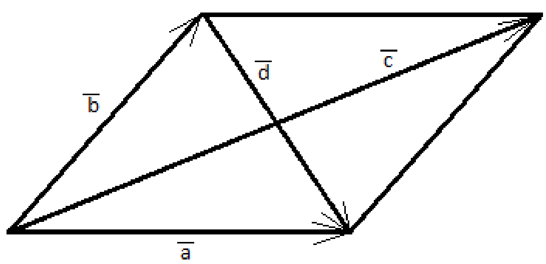
$$P := 2 \cdot A + 2 \cdot B.$$

Чтобы увидеть значение периметра, введите P=, получите:

$$P = 44,9543.$$

2. Как известно, одна из диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, есть сумма этих векторов, а вторая диагональ – их разность:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{d} = \vec{a} - \vec{b}. \tag{7}$$



В дальнейшем векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ будем называть вектор-диагонали.

Найдите векторы, являющиеся диагоналями параллелограмма, используя формулы (7):

$$c := a + b$$

$$d := a - b.$$

Выведите на экран полученные векторы, являющиеся диагоналями:

$$c = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \\ 17 \end{bmatrix},$$

$$d = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

3. Для нахождения площади воспользуйтесь формулой

$$S_{пар} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|. \qquad (8)$$

Обозначьте векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ через вектор $\vec{s}$ (здесь s маленькая):

$$s := a \times b.$$

Тогда площадь параллелограмма S (здесь S большая) равна длине вектора $\vec{s}$, то есть

$$S := \sqrt{{s_1}^2 + {s_2}^2 + {s_3}^2}.$$

Введите S=, получите:

$$S = 50,2295.$$

4. Из формулы $S = a \cdot h$, где a – основание параллелограмма, h – его высота, проведенная к этому основанию, получите

$$h = \frac{S}{a}. \qquad (9)$$

Длина основания совпадает с длиной вектора $\left|\vec{a}\right|$, и равна A (найдена по формуле (5) в пункте 1), а площадь параллелограмма равна S (найдена по формуле (8) в пункте 3).

Тогда, применяя формулу (9), найдите высоту *h*:

$$h := \frac{S}{A},$$

$$h = 2,8904.$$

Задание 7. Дан треугольник ΔABC, где $A(1;\ \ 4;\ \ -3)$, $B(5;\ \ 2;\ \ 9)$, $C(1;\ \ 2;\ \ 15)$. Найдите угол $\angle BAC$в радианах и в градусах.

Решение. Для решения этой задачи воспользуйтесь формулой

$$cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}, \tag{10}$$

где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

1. Введите радиус-векторы заданных точек:

$$OA := \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad OB := \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad OC := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ найдите по формулам:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overline{OA}.$$

Найдите векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, используя вышеприведенные формулы, и выведите их на экран:

$$a := OB - OA,$$

$$b := OC - OA,$$

$$a = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

2. Обозначьте искомый угол $\angle BAC$ через α (можно с боковой панели «Символы»), тогда по формуле (10) получите

$$cos\,\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Вычислите вначале длины векторов $A=|\vec{a}|$ и $B=|\vec{b}|$, применяя формулу (5):

$$A:=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

$$B:=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}.$$

Теперь вычислите косинус угла α по формуле (10):

$$cos\alpha:=\frac{a\cdot b}{A\cdot B}.$$

Замечание: Греческую букву α можно ввести с боковой панели «Символы».

3. Вычислите угол α, применив функцию арккосинус:

$$\alpha:=\arccos(cos\alpha).$$

Введите α= и нажмите клавишу «Enter» (или «щёлкните» левой клавишей мыши вне формулы), получите значение угла α в радианах:

$$\alpha=0,3221.$$

4. Чтобы получить значение угла α в градусах, введите букву α=. На экране появится:

$$\boxed{\alpha=0,3221\ \blacksquare}.$$

Поместите курсор на черный квадратик, находящийся справа, и нажмите кнопку  верхнего меню:

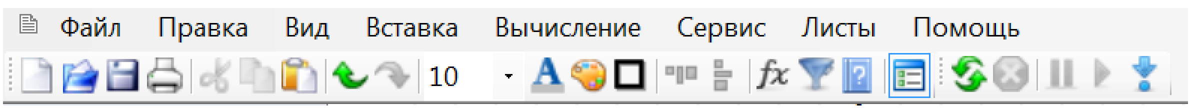


Рисунок 4.4 – Вид верхнего меню SMathStudio

На экране появится окно выбора требуемой единицы измерения (рисунок 4.5):

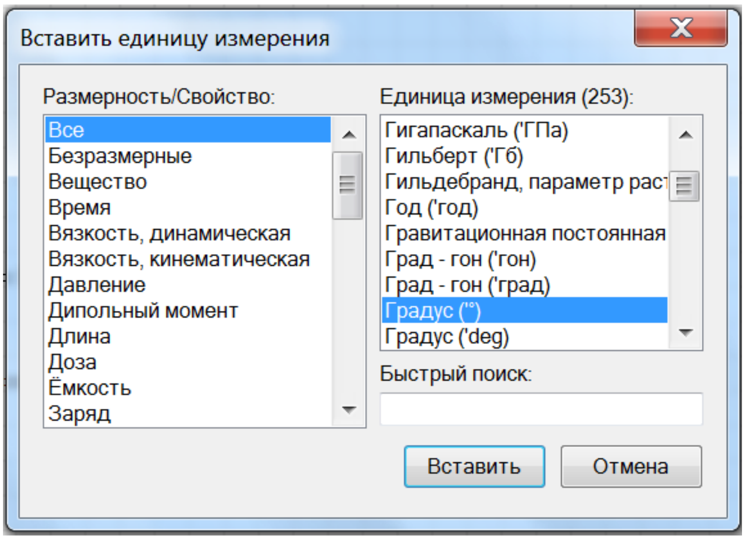


Рисунок 4.5 – Окно выбора требуемой единицы измерения

Выберите Градус ('°), нажмите кнопку Вставить и «щёлкните» левой клавишей мыши вне формулы.

На экране отобразится:

$$\alpha = 18,4577\,°.$$

Задание 8. Найдите объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (2;\ \ -5;\ \ 1)$, $\vec{b} = (3;\ \ 2;\ \ -2)$, $\vec{c} = (2;\ \ 1;\ \ 10)$.

Решение. Для нахождения объёма параллелепипеда, построенного на векторах, используйте геометрическое свойство смешанного произведения трех векторов, то есть формулу

$$V = \left|\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c}\right|. \tag{11}$$

1. Введите векторы:

$$a := \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad c := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

2. Введите:

$$V :=.$$

Затем нажмите кнопку вычисления модуля $|\blacksquare|$ боковой панели «Арифметика» (рисунок 4.6):

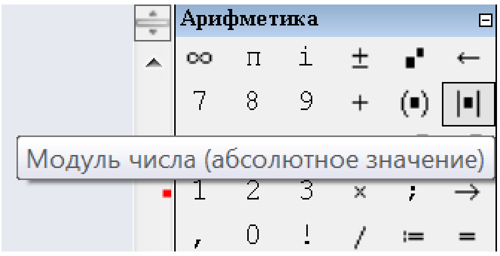


Рисунок 4.6 – Вычисление модуля с помощью боковой панели «Арифметика»

На экране отобразится:

$$V := |\blacksquare|.$$

Под знаком модуля наберите формулу смешанного произведения (11):

$$a \times b \cdot c,$$

то есть у вас должно получиться:

$$V := |a \times b \cdot c|.$$

3. Выведите полученное значение, набрав V=. Получите ответ:

$$V = 213.$$

2. Комплексные числа

Комплексным числом z называется упорядоченная пара вещественных чисел $(a;b)$, для которых определены понятия равенства, суммы и произведения по следующим правилам:

1. Два комплексных числа $z_1=(a_1;\ b_1)$ и $z_2=(a_2;\ b_2)$ считаются ***равными***, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$;

2. ***Суммой*** комплексных чисел $z_1=(a_1;b_1)$ и $z_2=(a_2;b_2)$ называется комплексное число $z = (a_1+a_2;\ b_1+b_2)$;

3. ***Произведением*** комплексных чисел $z_1=(a_1;\, b_1)$ и $z_2=(a_2;\, b_2)$ называется комплексное число $z = (a_1 a_2 - b_1 b_2;\, a_1 b_2 + a_2 b_1)$.

Первое число a пары (a,b) называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается символом $a = \operatorname{Re} z$; второе число b пары (a,b) называется *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается символом $b = \operatorname{Im} z$.

Рассмотрим множество комплексных чисел, расположенных на действительной оси Ox. Каждое из этих чисел имеет вид $(a;\, 0)$ и отождествляется с вещественным числом a, т.е. $(a;\, 0) = a$.

Это позволяет рассматривать множество всех действительных чисел как подмножество множества комплексных чисел.

Комплексное число $(0;\, b)$ при $b \neq 0$ называется чисто мнимым.

Чисто мнимое число $(0;\, 1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается буквой i, то есть $i = (0;1)$.

В силу определения произведения комплексных чисел справедливо равенство $(0,1)(0,1) = i\,i = i^2 = -1$ (откуда следует обозначение $i = \sqrt{-1}$).

Рассмотрим теперь произвольное комплексное число $z=(a;b)$. Представим его в виде $z = (a;\, 0)+(0;\, b)$. Также можем записать $z = a + bi$.

Запись $z = a + bi$ называется ***алгебраической формой*** комплексного числа.

Комплексное число $\bar{z} = a - ib$ называется *комплексно сопряженным* числу $z = a + ib$.

Рассмотрим на примере сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел в алгебраической форме в SMath-Studio.

Задание 9. Даны комплексные числа $\mathrm{z}1 = 2 + 3\mathrm{i}$, $\mathrm{z}2 = 7 - \mathrm{i}$.

1. Вычислите $z1+z2$, $z1-z2$, $z1\cdot z2$, $\frac{z1}{z2}$, $z1^3$.
2. Найдите число, сопряженное числу $z2$.

Решение. 1. Задайте комплексные числа z_1 и z_2:

$$z1 := 2+3\cdot i,$$

$$z2 := 7-i.$$

2. Чтобы найти сумму $z1+z2$, наберите:

$$z1+z2$$

и нажмите «равно». У вас должно получиться:

$$z1+z2 = 9+2\cdot i.$$

3. Чтобы вычислить разность $z1-z2$, наберите:

$$z1-z2$$

и нажмите «равно». У вас получится:

$$z1-z2 = -5+4\cdot i.$$

4. Теперь найдите произведение $z1\cdot z2$. Для этого наберите:

$$z1\cdot z2 = .$$

На экране появится результат:

$$z1\cdot z2 = 17+19\cdot i.$$

5. Вычислите значения частного $\frac{z1}{z2}$. Для этого наберите:

$$\frac{z1}{z2} = .$$

Получите результат:

$$\frac{z1}{z2} = 0,22+0,46\cdot i.$$

6. Вычислите $z1^3$. Для этого наберите:

$$z1^3.$$

У вас должно получиться:

$$z1^3 = -46 + 9 \cdot i$$.

7. Найдите теперь число, сопряженное числу $z2$. Назовите его для определенности $z2conp$.

Для этого введите формулу

$$z2conp := \frac{|z2|^2}{z2}$$.

Замечание: Здесь модуль вводится с боковой панели «Арифметика».

Выведите полученное значение на экран, набрав:

$$z2conp =$$.

Должно получиться:

$$z2conp = 7 + i$$.

Рассмотрим ***геометрическую интерпретацию*** комплексного числа. Вектор $\overrightarrow{OA}$, изображающий комплексное число $z = a+bi$, определяется координатами a и b, длиной r и углом φ, который он составляет с осью Ox.

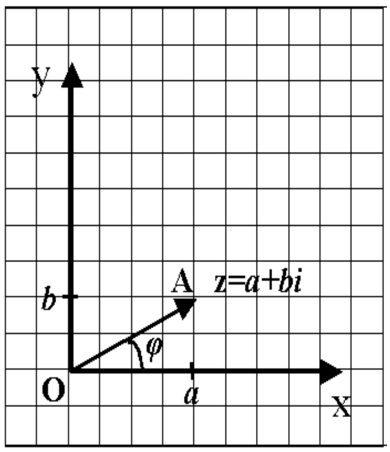


Рисунок 4.7 – Геометрическая интерпретация комплексного числа

Упорядоченная пара чисел (r, φ) называется полярными координатами точки A и связана с её прямоугольными координатами (a, b) известными соотношениями:

$$a = r\cos\varphi,\ \ b = r\sin\varphi \quad \text{или}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{r},\ \ \cos\varphi = \frac{a}{r}.$$

Число r называется ***модулем*** комплексного числа $z=a+bi$ и обозначается $r = |z|$, а число φ – его ***аргументом*** и обозначается $\varphi = \arg z$.

Модуль комплексного числа имеет значение:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

а аргумент определяется из решения уравнения $tg\,\varphi = b/a$ (необходимо учитывать знаки a и b). Отметим, что аргумент комплексного числа определен с точностью до слагаемого $2\pi k, k \in Z$.

Комплексное число $z = a+bi$ может быть записано в виде:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая запись называется ***тригонометрической формой*** комплексного числа.

Модуль произведения комплексных чисел z_1 и z_2 есть произведение модулей этих комплексных чисел z_1 и z_2, а аргумент произведения комплексных чисел z_1 и z_2 равен сумме аргументов комплексных чисел z_1 и z_2, т.е. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ и $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

Произведение n равных чисел z называется n-й *степенью* числа z и обозначается символом z^n: $\quad z^n = \underbrace{z \ldots z}_{n\,\text{раз}}$.

Ясно, что $\left|z^n\right| = |z|^n$ и $\arg z^n = n\arg z$.

Операция извлечения корня из комплексного числа осуществляется по формуле

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{12}$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Число различных значений корня n-й степени из комплексного числа равно n.

Рассмотрим на примере операцию извлечение корня из комплексного числа.

Задание 10. Дано комплексное число $z3 = 4 - 3i$. Найдите модуль и аргумент комплексного числа. Вычислите $\sqrt[5]{z3}$.

Решение. 1. Задайте комплексное число $z3$:

$$z3 := 4 - 3 \cdot i.$$

2. Теперь вычислите модуль $r = |z|$ и аргумент $\varphi = \arg z$ комплексного числа:

$$r := |z3|,$$

$$\varphi := \arg(z3).$$

Замечание: Здесь модуль вводится с боковой панели «Арифметика». Символ φ можно ввести с боковой панели «Символы».

Выведите полученные значения на экран, для этого наберите $r=$ и $\varphi=$:

$$r = 5,$$

$$\varphi = -0,6435.$$

Примечание: По умолчанию аргумент φ выдается в *радианах*.

Чтобы получить значение в градусах, поместите курсор на черный квадратик, находящийся справа выражения

$$\boxed{\varphi = -0,6435\ ■}$$

и нажмите кнопку верхнего меню (рисунок 4.8):

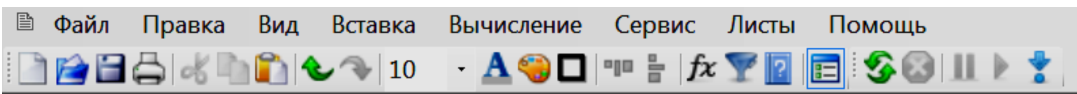


Рисунок 4.8 – Иллюстрация выбора «градусов» с помощью верхнего меню

На экране появится окно выбора требуемой единицы измерения (рисунок 4.9):

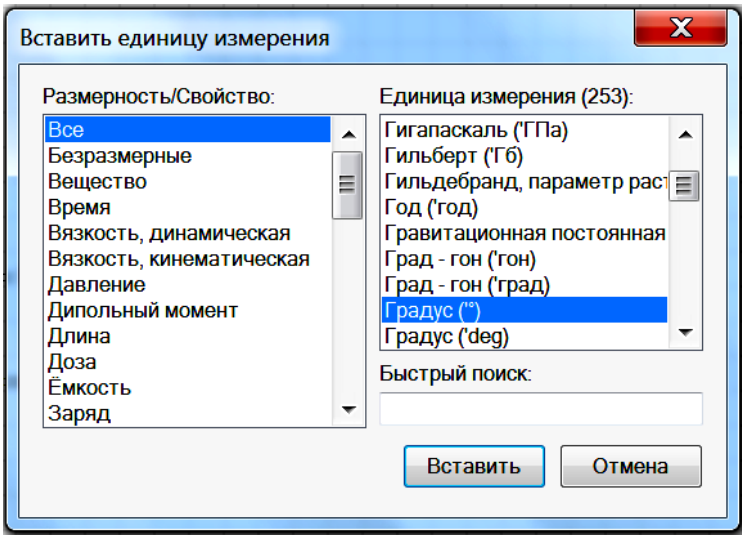


Рисунок 4.9 – Иллюстрация выбора единицы измерения «градус»

Выберите в единицах измерения Градус ('°), нажмите кнопку Вставить и щелкните левой клавишей мыши вне формулы.

На экране отобразится:

$$\varphi = -36,8699\,°$$

3. Чтобы извлечь корень 5-й степени из комплексного числа z3, задайте следующие значения:

$$n := 5$$

$$k := [0..(n-1)]$$

Введите формулу (12) для вычисления корня:

$$w := \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2 \cdot \pi \cdot k}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\varphi + 2 \cdot \pi \cdot k}{n}\right)\right)$$

У вас должно получиться:

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 1,3683 - 0,1771 \cdot i \\ 0,5912 + 1,2466 \cdot i \\ -1,0029 + 0,9475 \cdot i \\ -1,2111 - 0,661 \cdot i \\ 0,2544 - 1,3561 \cdot i \end{bmatrix}$$

Разберём теперь на примере ***геометрическое изображение*** комплексного числа.

Задание 11. Дано комплексное число $z4 = 8 - 4i$. Изобразите комплексное число на плоскости.

Решение. 1. Задайте комплексное число $z4$:

$$z4 := 8 - 4 \cdot i$$.

2. Изобразите вначале комплексное число в виде точки. Для этого введите:

$$Point := [\,8 \quad -4 \quad \text{"*"} \quad 10 \quad \text{"black"}\,]$$.

Здесь:

8 – действительная часть комплексного числа;

– 4 – мнимая часть комплексного числа;

"*" – маркер, т.е. символ, изображающий точку;

10 – размер маркера в пунктах;

"black" – цвет маркера (в нашем случае – чёрный).

Замечание: В качестве маркера могут быть использованы следующие символы:

Спецсимвол	**Описание**
+	знак + отображается как крестик
*	знак "*" отображается в виде пятиконечной звезды
o	знак "o" (маленькая буква О в английской раскладке) отображается как окружность
x	знак "x" (икс маленькая в английской раскладке) отображается как повернутый крестик
.	знак "." (точка) отображается как жирная точка.

Возможны следующие цвета маркера (рисунок 4.10):

Значение	Цвет	Значение	Цвет
"aqua"		"navy"	
"black"		"olive"	
"blue"		"purple"	
"brown"		"red"	
"fuchsia"		"silver"	
"gray"		"teal"	
"green"		"violet"	
"lime"		"white"	
"maroon"		"yellow"	

Рисунок 4.10 – Некоторые возможные цвета маркера

3. Вставьте шаблон двумерного графика (Вставка-График-Двумерный):

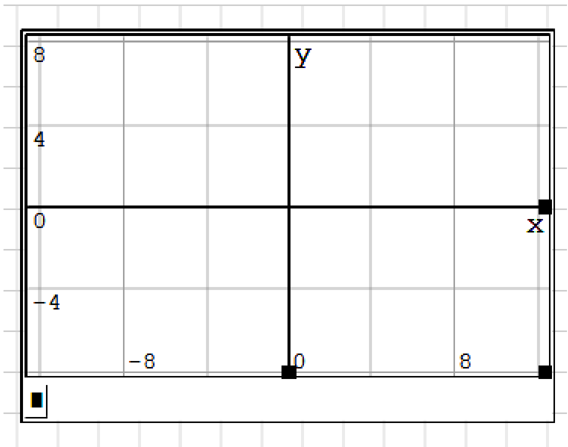


Рисунок 4.11 – Шаблон двумерного графика

В нижней левой части шаблона введите имя *Point*.

Получите геометрическое изображение комплексного числа $z4 = 8 - 4i$ в виде точки черного цвета размера 10 пунктов, маркер *:

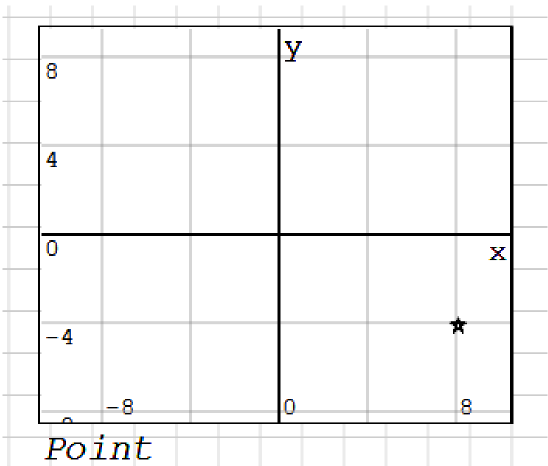


Рисунок 4.12 – Изображение комплексного числа в виде точки

4. Изобразите теперь комплексное число в виде отрезка на комплексной плоскости.

Для этого введите матрицу:

$$z4(x) := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix},$$

где первый элемент второй строки – вещественная часть комплексного числа, а второй – мнимая часть комплексного числа.

Замечание:

Вещественную и мнимую часть комплексного числа можно ввести самостоятельно (в нашем примере это числа 8 и -4), а можно, используя функции Re(z) – вещественная часть и Im(z) – мнимая часть, то есть можно ввести:

$$z4(x) := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{Re}(z4) & \mathrm{Im}(z4) \end{bmatrix}.$$

5. Вставьте шаблон двумерного графика и в нижней левой части шаблона введите имя:

$$z4(x).$$

Получите геометрическое изображение комплексного числа $z4 = 8 - 4i$ в виде отрезка (рисунок 4.13):

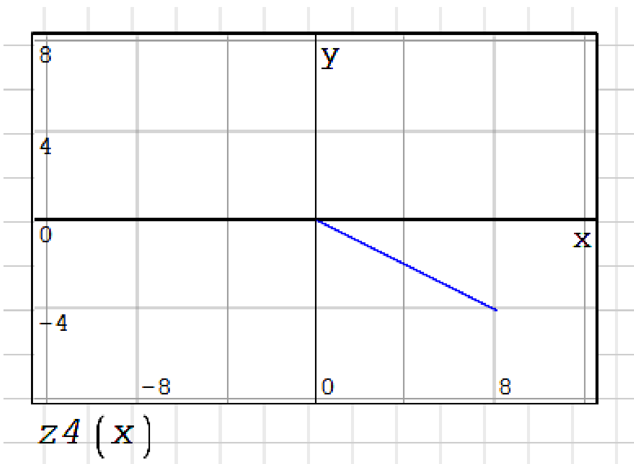


Рисунок 4.13 – Изображение комплексного числа в виде отрезка

Контрольные вопросы

1. Как задать вектор в SMathStudio?
2. Как в SMathStudio сложить, вычесть два вектора, умножить вектор на число?
3. С помощью какой панели инструментов в SMathStudio можно вычислить скалярное и векторное произведения двух векторов?
4. Как найти смешанное произведение трех векторов в SMathStudio?
5. Как в SMathStudio найти длину вектора?
6. Как с помощью векторов вычислить площадь параллелограмма?
7. Как в SMathStudio вычислить угол между векторами?
8. Как в SMathStudio найти объем параллелепипеда, построенного на трех заданных векторах?
9. Как в SMathStudio сложить, вычесть, умножить, разделить два комплексных числа в алгебраической форме?
10. Как возвести комплекное число в степень в SMathStudio?
11. Как в SMathStudio извлечь корень n-ой степени из комплексного числа?
12. Как изобразить комплексное число геометрически в SMathStudio?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Нахождение и применение производной функции для решения некоторых задач в SMathStudio

Цель работы: Изучить возможности дифференцирования в SMathStudio. Научиться находить производные функции одной переменной и решать прикладные задачи, связанные с их применением.

1. Производная функции

В лабораторной работе № 4 мы начали рассматривать возможности SMathStudio при решении некоторых задач математического анализа. В этой лабораторной работе подробно остановимся на операторе, который позволяет находить в SMathStudio производную функции одной переменной, и рассмотрим некоторые задачи, связанные с отысканием производной.

Производная функции одной переменной $f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ и определяется формулой

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{13}$$

Наряду с обозначением $f'(x_0)$ в математической литературе используется следующее обозначение производной: $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Если точка x зафиксирована, т.е. $x = x_0$, то производная функции $f'(x_0)$ есть число. Если точка x произвольная, то $f'(x)$ есть функция от x.

Для функции $f(x)$ можно находить в точке x_0 (или произвольной точке x) производную $n-$го (n>1) порядка по правилу

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Также производную *n*-го порядка часто обозначают $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$.

В SMathStudio есть оператор дифференцирования, позволяющий находить производную первого порядка $f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$, не применяя напрямую формулу (13). Он находится на боковой панели «Функции» и вызывается кнопкой  (рисунок 5.1):

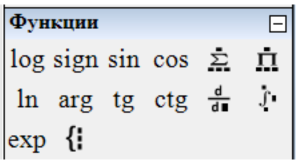
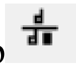


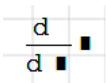
Рисунок 5.1 – Оператор дифференцирования боковой панели «Функции»

Результатом его использования может быть как число (значение производной функции в точке), так и функция – производная функции в произвольной точке.

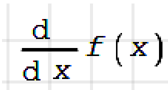
Чтобы получить результат в виде функции *(в символьном виде),* необходимо:

1. Задать функцию, например $f(x):=\sin x^3$.

2. Вызвать оператор , на экране появится шаблон:


.

3. На месте переменной (черный квадратик внизу шаблона) ввести имя переменной, по которой производится дифференцирование (например, *x*), а на месте функции (черный квадратик в правой части шаблона) ввести имя функции (например, $f(x)$):


.

4. На боковой панели «Арифметика»:

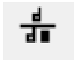
нажать кнопку  – оператор символьного вычисления.

Рассмотрим дифференцирование в символьном виде на примере.

Задание 1. Дана функция $f(x)=5x^{10}-4\sin 3x$. Найдите производную функции.

Решение. 1. Задайте функцию:

$$f(x):=5\cdot x^{10}-4\cdot \sin(3\cdot x).$$

2. Выведите оператор дифференцирования  с боковой панели «Функции». На экране появится шаблон:

$$\frac{d}{d\,\blacksquare}\blacksquare.$$

3. На местах ввода запишите имя переменной *x* и имя функции $f(x)$:

$$\frac{d}{dx}f(x).$$

4. Нажмите кнопку → боковой панели «Арифметика». На экране появится:

$$\frac{d}{dx}f(x)=2\cdot\left(25\cdot x^{9}-6\cdot\cos(3\cdot x)\right).$$

Так как точка *x* не фиксирована, то производной функции $f(x)=5x^{10}-4\sin 3x$ является функция $f'(x)=2\cdot\left(25x^{9}-6\cos 3x\right)$.

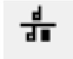
Замечание:

Для нахождения производной можно не задавать предварительно функцию, а ввести её сразу на месте имени функции в шаблоне:

$$\frac{d}{d\,\blacksquare}\blacksquare.$$

Рассмотрим эту возможность на следующем примере.

Задание 2. Дана функция $y=2x^{3}-3\ln(x-1)+7$. Найдите производную функции.

Решение. 1. Выведите оператор дифференцирования  с боковой панели «Функции».

На экране появится шаблон:

$$\frac{d}{d\,\blacksquare}\blacksquare\,.$$

2. На местах ввода запишите имя переменной *x* и функцию:

$$\frac{d}{d\,x}\left(2\cdot x^{3}-3\cdot \ln(x-1)+7\right).$$

3. Нажмите кнопку → боковой панели «Арифметика». На экране появится:

$$\frac{d}{d\,x}\left(2\cdot x^{3}-3\cdot \ln(x-1)+7\right)=\frac{3\cdot\left(-1+2\cdot x^{2}\cdot(-1+x)\right)}{-1+x}.$$

Существует ещё один более быстрый способ нахождения производной в символьном виде:

1. Ввести формулу, которая задает функцию.
2. Выделить переменную *x* (переменную дифференцирования).

3. На верхней панели SMathStudio выбрать «Вычисление». В появившейся вкладке (рисунок 5.2) выбрать «Дифференцировать»:

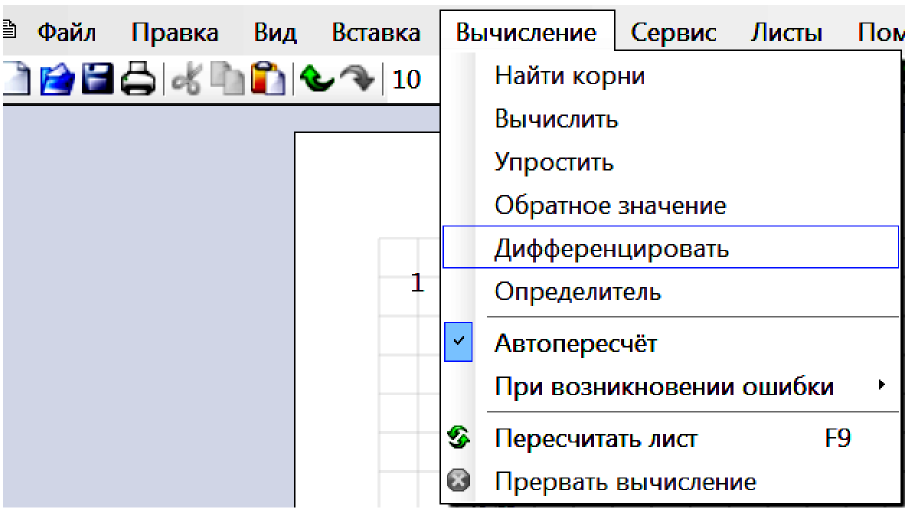


Рисунок 5.2 – Выбор опции «Вычисление–Дифференцировать»

Рассмотрим эту возможность на следующем примере.

Задание 3. Дана функция $y = 3\sin 4x - 11x$. Найдите производную функции.

Решение. 1. Введите формулу, которая задает функцию:

$$2 \cdot \sin(4 \cdot x) - 11 \cdot x.$$

2. Выделите переменную *x*:

$$\boxed{2 \cdot \sin(4 \cdot x) - 11 \cdot x}$$

3. На верхней панели выберите «Вычисление», а затем в появившейся вкладке выберите «Дифференцировать». На экране появится:

$$-11 + 8 \cdot \cos(4 \cdot x).$$

То есть производная функции $y = 3\sin 4x - 11x$ равна:

$$y' = -11 + 8\cos 4x.$$

Чтобы найти значение производной функции *в заданной точке*, необходимо перед нахождением производной присвоить переменной дифференцирования *x* заданное значение.

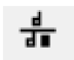
Задание 4. Дана функция $f(x) = \sin x \cdot \cos 2x$. Найдите значение производной этой функции в точке $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Решение. 1. Задайте функцию:

$$f(x) := \sin(x) \cdot \cos(2 \cdot x).$$

2. Задайте переменной *x* значение:

$$x := \frac{\pi}{4}.$$

3. Выведите оператор дифференцирования  с боковой панели «Функции».

На экране появится шаблон:

$$\frac{d}{d\,\blacksquare}\blacksquare.$$

4. На местах ввода запишите имя переменной *x* и имя функции:

$$\frac{d}{d\,x}f(x)$$.

5. Нажмите кнопку → боковой панели «Арифметика». На экране появится:

$$\frac{d}{d\,x}f(x)=-\sqrt{2}$$.

Нажмите = («равно»), получите:

$$\frac{d}{d\,x}f(x)=-1,4142$$.

Замечание:

После того как вы присвоили переменной *x* значение $x := \frac{\pi}{4}$, это значение будет автоматически подставляться вместо переменной *x* в последующих заданиях.

Поэтому перед выполнением задания 5 рекомендуется либо удалить присвоенное значение $x := \frac{\pi}{4}$, либо выполнять задание 5 в *новом листе*.

Для нахождения производных *второго и более высоких порядков* можно использовать два способа.

Способ 1.

1. Задать функцию.

2. Последовательно ввести с боковой панели «Функции» столько операторов дифференцирования, каков порядок производной. Например, если нужно найти производную *второго порядка* функции *f(x)*, то следует ввести:

$$\frac{d}{d\,x}\frac{d}{d\,x}f(x)$$.

3. Нажать кнопку → боковой панели «Арифметика».

Способ 2.

1. Задать функцию.

2. Ввести с клавиатуры di. На экране появится окно (рисунок 5.3):

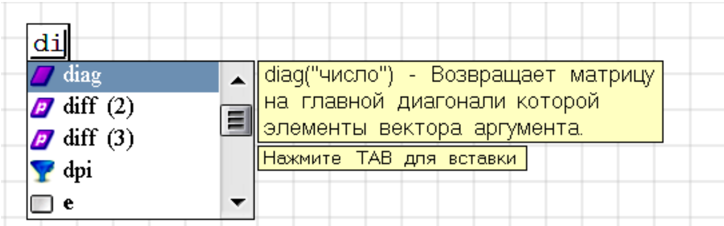


Рисунок 5.3 – Окно выбора оператора дифференцирования diff

Если нужно найти производную первого порядка, выбрать из появившегося списка diff(2), если второго или выше, то diff(3) и нажать на клавиатуре клавишу Tab. На экране появится шаблон:

$$\frac{d^{\blacksquare}}{d\,\blacksquare^{\blacksquare}}\blacksquare.$$

3. На месте переменной дифференцирования (черный квадратик внизу шаблона) ввести имя переменной (например, *x*). Чуть выше и правее место ввода порядка производной (если нужно найти производную второго порядка, ввести 2, если третьего – 3, и так далее). Ещё выше и правее – место имени функции. Например, если нужно найти производную *третьего порядка* функции *f(x)*, то следует ввести:

$$\frac{d^3}{d\,x^3}f(x).$$

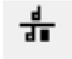
4. Нажать кнопку → боковой панели «Арифметика».

Рассмотрим на примерах нахождение производных *второго и более высоких порядков*.

Задание 5. Дана функция $g(x)=e^{\sin x}$. Найдите производную третьего порядка *первым* способом.

Решение. 1. Задайте функцию:

$$g(x):=e^{\sin(x)}.$$

2. Выведите оператор дифференцирования  с боковой панели «Функции». На экране появится шаблон:

$$\frac{d}{d\,\blacksquare}\blacksquare.$$

3. На месте ввода переменной дифференцирования введите имя переменной *x*, а на месте ввода функции снова введите оператор дифференцирования . На экране отобразится:

$$\frac{d}{d\,x}\frac{d}{d\,\blacksquare}\blacksquare.$$

4. Снова на месте ввода переменной дифференцирования введите имя переменной *x*, а на месте ввода функции снова введите оператор дифференцирования . На экране отобразится:

$$\frac{d}{d\,x}\frac{d}{d\,x}\frac{d}{d\,\blacksquare}\blacksquare.$$

5. На местах ввода запишите имя переменной *x* и имя функции $g(x)$:

$$\frac{d}{d\,x}\frac{d}{d\,x}\frac{d}{d\,x}g(x).$$

6. Нажмите кнопку → боковой панели «Арифметика». На экране появится:

$$\frac{d}{d\,x}\frac{d}{d\,x}\frac{d}{d\,x}g(x) = -\mathbf{e}^{\sin(x)}\cdot\cos(x)\cdot\left(1-\cos(x)^2+3\cdot\sin(x)\right).$$

Рассмотрим на следующем примере второй способ нахождение производных *второго и более высоких порядков*.

Задание 6. Для функции $g(x)=e^{\sin x}$, заданной в примере 5, найдите производную третьего порядка *вторым* способом.

Решение. 1. В Задании 5 вы уже задали функцию $g(x)=e^{\sin x}$. Повторно её задавать не нужно.

2. Введите с клавиатуры di. На экране появится окно (рисунок 5.4):

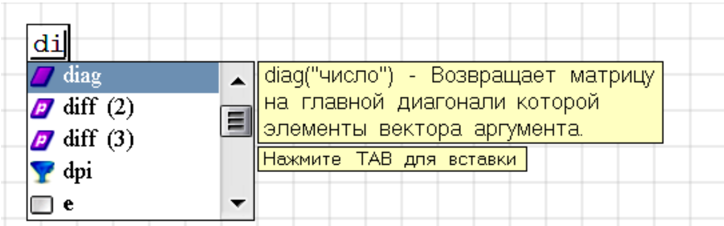


Рисунок 5.4 – Один из способов вызова оператора дифференцирования

Выберите из появившегося списка diff(3) и нажмите на клавиатуре клавишу Tab. На экране появится шаблон:

$$\frac{d^{\blacksquare}}{d\,\blacksquare^{\blacksquare}}\blacksquare\ .$$

3. На месте переменной дифференцирования (черный квадратик внизу шаблона) введите имя переменной *x*. Чуть выше и правее введите порядок производной – число 3. Ещё выше и правее введите имя функции *g(x)*. Нажмите кнопку → боковой панели «Арифметика». На экране появится:

$$\frac{d^3}{d\,x^3}g(x) = -e^{\sin(x)}\cdot\cos(x)\cdot\left(1-\cos(x)^2+3\cdot\sin(x)\right)$$

На практических занятиях по высшей математике мы сталкивались с необходимостью находить производную функции, заданной *параметрически*.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Если x и y связаны равенствами $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha;\ \beta]$, то в этом случае говорят, что функция $y = f(x)$ задана *параметрически*, t называют параметром.

Если функция задана двумя параметрическими равенствами:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

то производная $y'(x)$ вычисляется по формуле

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \tag{14}$$

Для нахождения производной второго порядка функции, заданной параметрически, воспользуемся определением производной второго порядка:

$$y''(x) = (y'(x))' = \frac{d(y'(x))}{dx}. \qquad (15)$$

В формулу (15) вместо $y'(x)$ подставим выражение, полученное по формуле (14), содержащее произвольный параметр *t*:

$$y''(x) = \frac{\frac{d}{dt}y'(x)}{\frac{d}{dt}x(t)} \qquad (16)$$

Выполните следующие задания на нахождение производной *параметрически* заданной функции.

Задание 7. Найдите производную $y'(x)$, если $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

Решение. 1. Задайте функции $x(t)$ и $y(t)$:

$$x(t) := 2 \cdot \cos(t),$$

$$y(t) := \sin(t).$$

2. Найдите первую производную по формуле (14), обозначив её *q(t)*:

$$q(t) := \frac{\frac{d}{dt}y(t)}{\frac{d}{dt}x(t)}.$$

3. Нажмите кнопку → боковой панели «Арифметика». На экране появится результат дифференцирования:

$$q(t) = -\frac{\cos(t)}{2 \cdot \sin(t)}.$$

Задание 8. Используя формулу (16), найдите $y''(x)$ функции *y(x)*, заданной параметрическими равенствами $\begin{cases} x = t^3 \\ y = e^{2t} \end{cases}$.

Решение. 1. Задайте функции $x(t)$ и $y(t)$:

$$x(t) := t^3$$

$$y(t) := e^{2\cdot t}.$$

2. Найдите вначале производную первого порядка, обозначив её через *s(t)*:

$$s(t) := \frac{\frac{d}{dt}y(t)}{\frac{d}{dt}x(t)}.$$

3. Производную второго порядка вычислите по формуле (16), то есть введите:

$$\frac{\frac{d}{dt}s(t)}{\frac{d}{dt}x(t)},$$

Нажмите кнопку → боковой панели «Арифметика». На экране появится результат дифференцирования:

$$\frac{\frac{d}{dt}s(t)}{\frac{d}{dt}x(t)} = \frac{4\cdot e^{2\cdot t}\cdot(-1+t)}{9\cdot t^5}.$$

2. Геометрический и механический смысл производной. Исследование функции с помощью производной

В этом пункте рассмотрим задачи, связанные с геометрическим, механическим смыслом производной и задачи на исследование функции с помощью производной.

Геометрический смысл производной заключается в равенстве

$$k = f'(x_0), \tag{17}$$

где k – угловой коэффициент касательной к кривой в точке x_0.

Механический смысл производной заключается в том, что скорость V изменения функции $f(x)$ в момент $x = x_0$ совпадает со значением её производной в этой точке, то есть:

$$V(x_0) = f'(x_0). \tag{18}$$

Уравнение касательной к графику функции $f(x)$ имеет вид:

$$y - f(x_0) = k \cdot (x - x_0)$$

или

$$y = k \cdot (x - x_0) + f(x_0), \tag{19}$$

где x_0 – абсцисса точки касания,

$f(x_0)$ – ордината точки касания;

$k = f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной.

Задание 9. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $x_0 = -2$, если $f(x) = \dfrac{2x^2 + 9}{4x - 1}$. Постройте графики функции $f(x)$ и её касательной в точке $x_0 = -2$.

(Это задание выполните в новом рабочем документе).

Решение. 1. Введите функцию $f(x)$:

$$f(x) := \frac{2 \cdot x^2 + 9}{4 \cdot x - 1}.$$

2. Задайте угловой коэффициент k(x) касательной в произвольной точке *x* по формуле (17):

$$k(x) := \frac{d}{dx} f(x).$$

3. Присвойте переменной x0 значение, равное -2:

$$x0 := -2.$$

4. По формуле (19) составьте уравнение касательной:

$$y(x) := k(x0) \cdot (x - x0) + f(x0).$$

5. Введите:

$$y(x) \to$$

Получите уравнение касательной:

$$y(x) = \frac{-153 + 4 \cdot (2 + x)}{81}.$$

6. Чтобы построить графики функции $f(x)$ и её касательной в точке $x_0 = -2$, выведите шаблон построения графика с помощью главного меню **Вставка → График →Двумерный (2D)** (рисунок 5.5):

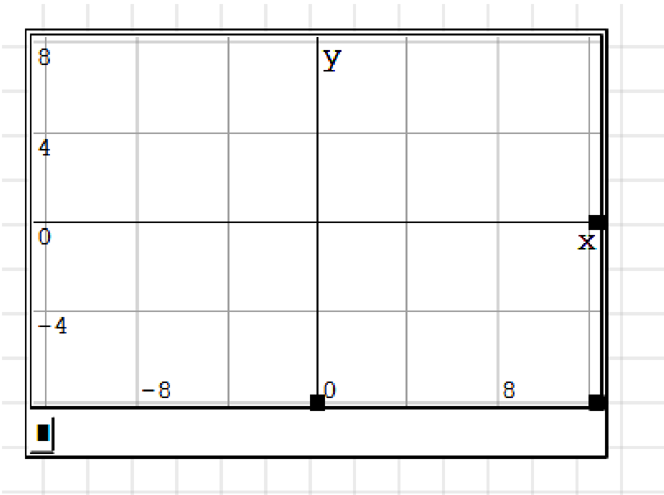


Рисунок 5.5 – Шаблон построения графика с помощью главного меню

В нижнем левом углу шаблона вставьте  из боковой панели «Функции» (рисунок 5.6):

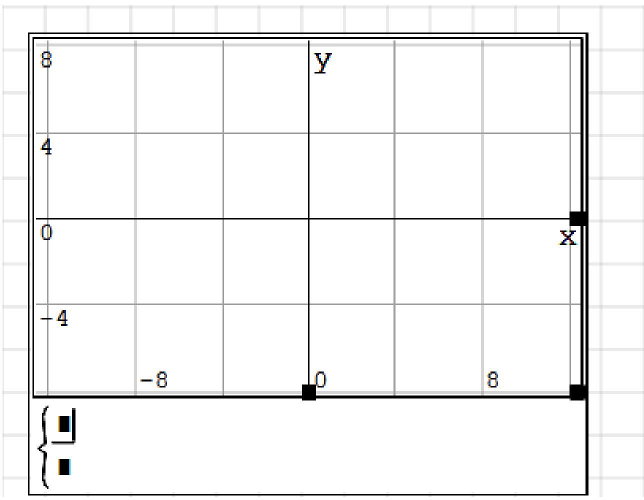


Рисунок 5.6 – Этап построения графика

В поле ввода введите последовательно имена функций *f(x)*, *y(x)*.

«Щёлкните» мышью вне области графика, на экране отобразится требуемый график (рисунок 5.7):

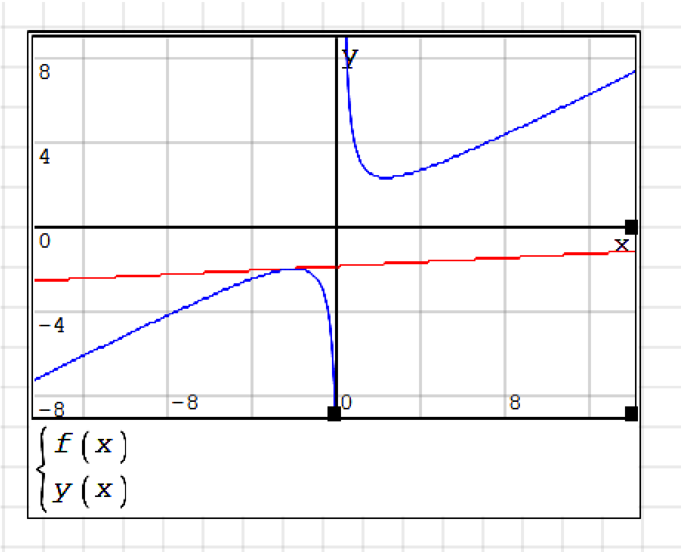


Рисунок 5.7 – Графики функции $f(x)$ и её касательной в точке $x_0 = -2$.

Задание 10. Найдите скорость движения тела в момент времени $t = 45$, если путь, пройденный к моменту времени t, описывает закон $s(t) = \dfrac{1}{10}t^3 + 10{,}029$.

Решение. 1. Введите функцию $s(t)$:

$$s(t) := \frac{1}{10} \cdot t^3 + 10{,}029.$$

2. Введите V – скорость движения тела в произвольный момент времени t по формуле (18):

$$V(t) := \frac{d}{dt} s(t) = \frac{3 \cdot t^2}{10}.$$

3. Найдите скорость движения тела в момент времени $t = 45$, набрав V(45)= , получите:

$$V(45) = 607{,}5.$$

Задание 11. Найдите точки экстремума функции $g(x)=x^3-6x^2+9x-1$.

Решение. 1. Введите функцию $g(x)$:

$$g(x):=x^3-6\cdot x^2+9\cdot x-1$$.

2. Найдите производную $g'(x)$:

$$\frac{d}{dx}g(x)=9+x\cdot(-6+x+2\cdot(-3+x))$$.

3. Найдите критические точки, то есть точки, в которых производная $g'(x)=\dfrac{dg(x)}{dx}$ равна нулю.

Для решения уравнения $\dfrac{dg(x)}{dx}=0$ воспользуйтесь оператором ***solve***. Начните вводить X:=so. На экране появится окно (рисунок 5.8):

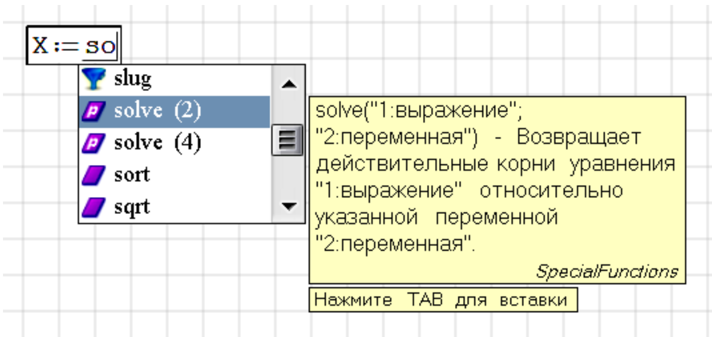


Рисунок 5.8 – Окно ввода оператора solve

Выберите solve(2) и нажмите клавишу Tab на клавиатуре. Появится шаблон:

$$X:=\mathrm{solve}(\blacksquare;\blacksquare)$$.

В первой позиции шаблона введите левую часть уравнения, а в правой переменную, относительно которой требуется решить уравнение, то есть

$$X:=\mathrm{solve}\left(\frac{d}{dx}g(x);x\right)$$.

Чтобы вывести результат, наберите X=.

Получите:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

То есть имеем две критические точки $X_1=1$, $X_2=3$.

4. Для нахождения точек экстремума функции $g(x)$ используйте 2-е достаточное условие экстремума:

Если первая производная $g'(x)$ дважды дифференцируемой функции $g(x)$ равна нулю в некоторой точке x_0, а вторая производная в этой точке положительна $(g''(x_0)>0)$, то x_0 – точка минимума функции $g(x)$; если $g''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума.

Обозначьте вторую производную функции $g(x)$ через g2(x):

$$g2(x) := \frac{d^2}{dx^2} g(x).$$

Вычислите значение второй производной в точках $X_1=1$:

$$g2(X_1) = -6.$$

Так как $g''(x_1) = -6 < 0$, то делаем вывод, что точка $X_1=1$ является точкой максимума функции $g(x)$.

Вычислите значение второй производной в точках $X_2=3$:

$$g2(X_2) = 6.$$

Так как $g''(x_2) = 6 > 0$, то точка $X_2=3$ является точкой минимума функции $g(x)$.

5. Найдите значения функции *g(x)* в точках максимума и минимума:

$$g(X_1) = 3$$

$$g(X_2) = -1.$$

Контрольные вопросы

1. На какой панели инструментов SMathStudio находится оператор дифференцирования?
2. Как в SMathStudio найти производную в символьном виде?
3. Опишите способы нахождения производных второго и более высоких порядков в SMathStudio.
4. Как в SMathStudio найти производную функции, заданной параметрически?
5. Как в SMathStudio найти скорость движения тела в заданный момент времени?
6. Опишите алгоритм составления уравнения касательной к графику функции в SMathStudio.
7. Приведите алгоритм нахождения точек экстремума функции в SMathStudio.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

Вычисление определенного интеграла функции в SMathStudio. Геометрические приложения определенного интеграла

Цель работы: Изучить возможности интегрирования в SMathStudio. Научиться вычислять определенный интеграл и применять его при решении прикладных задач в SMathStudio.

1. Определённый интеграл функции

В лабораторной работе № 5 мы рассматривали возможности SMathStudio, которые могут быть использованы в решении прикладных математических задач, связанных с понятием производной функции.

В этой лабораторной работе мы продолжим изучать инструменты SMathStudio для решения задач математического анализа, в которых используется другое важное понятие – определённого интеграла функции.

На лекционных и практических занятиях по высшей математике было дано понятие определённого интеграла функции, изучались свойства, методы нахождения и решались различные задачи, в которых использовались эти понятия.

Определённый интеграл функции $f(x)$ на $[a;b]$ определяется формулой

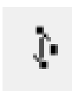
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_n, \qquad (20)$$

где σ_n – интегральная сумма функции $f(x)$;

λ – наибольшая из длин частичных сегментов;

a – нижний предел интегрирования;

b – верхний предел интегрирования.

В SMathStudio нахождение определённого интеграла функции выполняется с помощью оператора , который находится на боковой панели «Функции» (рисунок 6.1):

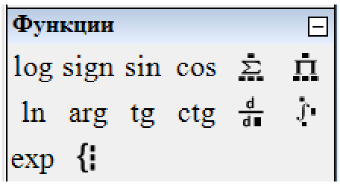
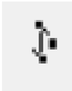
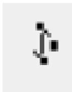


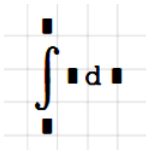
Рисунок 6.1 – Оператор определенного интеграла боковой панели «Функции»

 – оператор определённого интеграла; выводится на экран с панели «Функции» этой кнопкой; служит для точного или приближённого вычисления определённого интеграла. Для приближённого вычисления после появления оператора на экране и ввода подынтегрального выражения следует нажать =, а для точного →.

Разберём вычисление определенного интеграла на примерах.

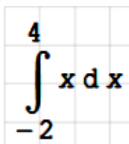
Задание 1. Вычислите интеграл $\int_{-2}^{4} x\,dx$.

Решение. 1. Для вычисления определённого интеграла воспользуйтесь оператором определённого интегрирования , на экране появится следующий шаблон:



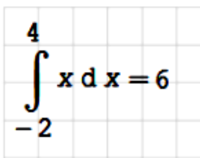
.

2. Введите пределы интегрирования (верхний и нижний) в подынтегральное выражение



и нажмите → на боковой панели «Арифметика».

На экране появится:



.

3. Проделайте то же самое, но в конце нажмите вместо → знак равно =, вы снова получите:

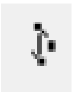
$$\int_{-2}^{4} x\,dx = 6.$$

Вы получили в обоих случаях одинаковый результат, так как данный определенный интеграл имеет *точный ответ* 6:

$$\int_{-2}^{4} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{4} = \frac{4^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = \frac{16}{2} - \frac{4}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Рассмотрим различия в выборе знаков = и → при вычислении определенного интеграла на следующем примере.

Задание 2. Вычислите интеграл $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение. 1. Как и в предыдущем примере для вычисления определённого интеграла воспользуйтесь оператором определённого интегрирования , на экране появится следующий шаблон:

$$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare\, d\blacksquare.$$

2. Введите пределы интегрирования (верхний и нижний) в подынтегральное выражение:

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

и нажмите → на боковой панели «Арифметика».

На экране появится:

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{69147834430202}{225179981368525}.$$

3. Проделайте то же самое, но в конце нажмите вместо символа → знак равно =, вы получите:

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, d\,x = 0,3071$$.

Выбрав знак равно =, вы получили приближённое значение определенного интеграла.

Справа от полученного результата находится черный квадратик:

$$\boxed{\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, d\,x = 0,3071 \,\blacksquare}$$.

Если «щёлкнуть» по нему правой кнопкой мыши, на экране появится меню (рисунок 6.2):

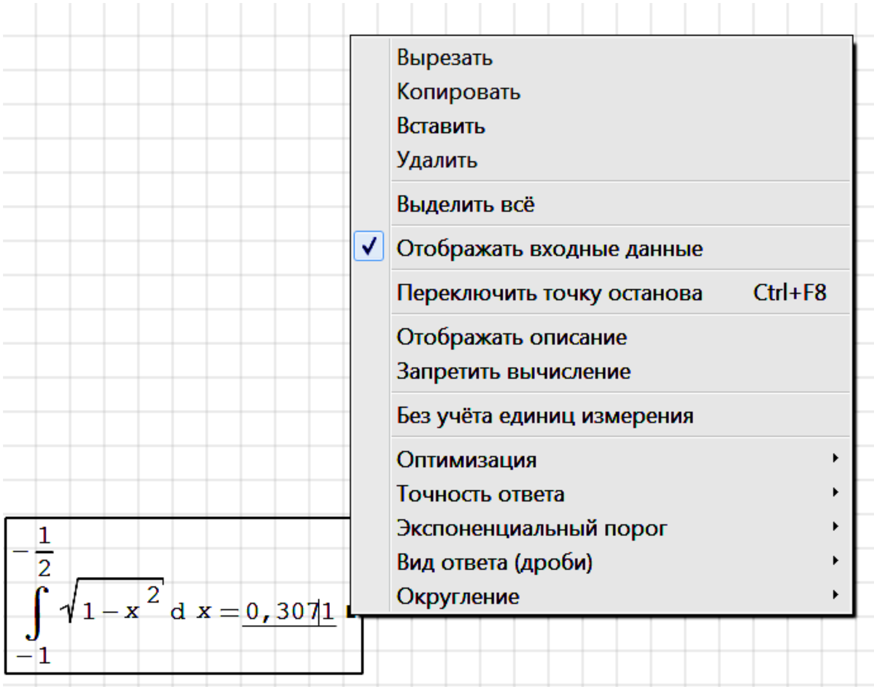


Рисунок 6.2 – Возможности форматирования ответа

Здесь можно выбрать опцию «Точность ответа», то есть количества знаков после десятичной точки.

Выберите данную опцию, на экране появится окно (рисунок 6.3):

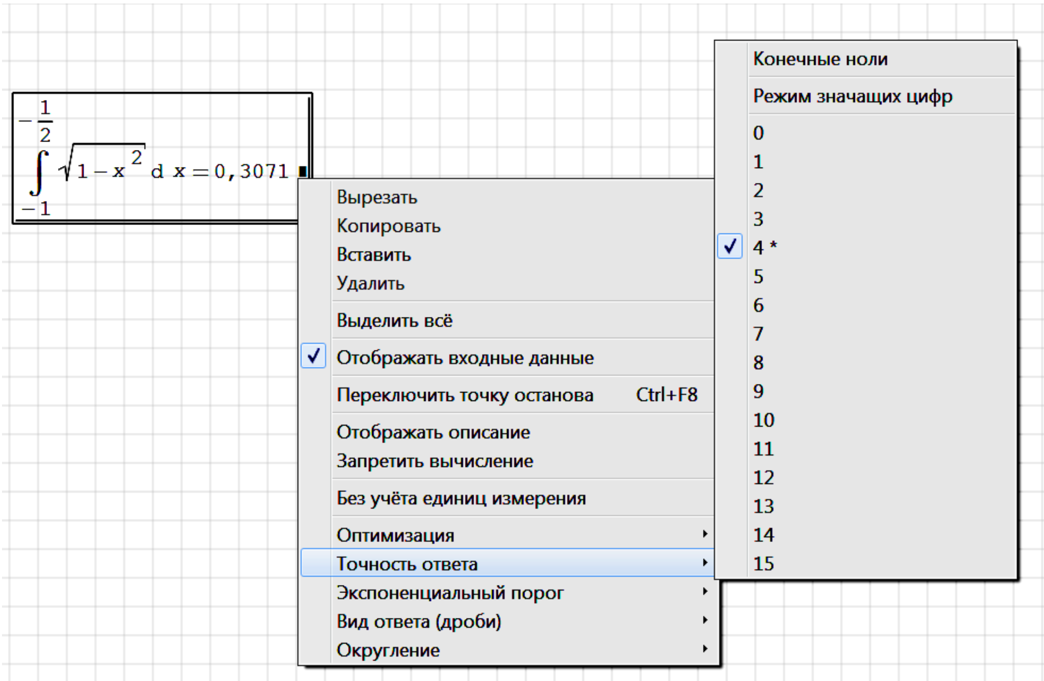


Рисунок 6.3 – Выбор точности ответа

Выберите точность «6», тогда приближенное значение искомого интеграла будет равно:

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, d\,x = 0,307078 .$$

Замечание:

Шаблон $\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, d \, \blacksquare$ можно вывести на экран не только с боковой панели «Функции». Можно также набрать с клавиатуры ***int***, на экране появится окно (рисунок 6.4):

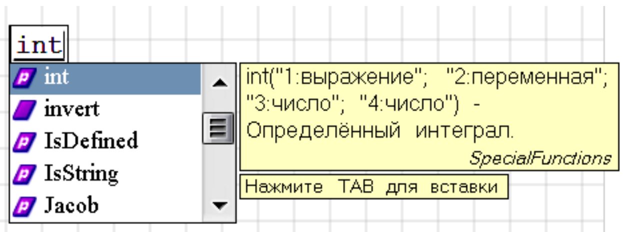
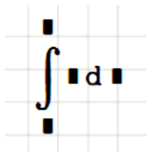


Рисунок 6.4 – Окно выбора оператора интегрирования

Затем нажать клавишу **Tab** на клавиатуре. На экране появится шаблон для интегрирования:

.

Замечание:

Нижний и верхний пределы интегрирования, а также подынтегральную функцию можно задать заранее, например,

a:=1,

b:=2,

y:=lnx,

и подставить в шаблон уже заданные переменные a, b и функцию y.

Рассмотрим эти возможности на следующем примере.

Задание 3. Вычислите интеграл $\int_{0}^{\pi} x \sin 3x^2 dx$.

Решение. 1. Задайте пределы интегрирования:

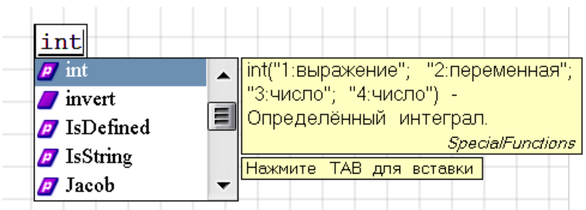
$$a := 0,$$

$$b := \pi.$$

Задайте подынтегральную функцию:

$$y := x \cdot \sin\left(3 \cdot x^2\right).$$

2. Чтобы получить шаблон определенного интегрирования, наберите ***int***, на экране появится окно:



.

Затем нажмите клавишу **Tab** на клавиатуре. На экране появится шаблон для интегрирования:

$$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, \mathrm{d} \blacksquare .$$

3. Заполните в шаблоне требуемые позиции (черные квадратики):

$$\int_{a}^{b} y \, \mathrm{d} x$$

и нажмите =. На экране появится результат вычисления:

$$\int_{a}^{b} y \, \mathrm{d} x = 0{,}2057 .$$

2. Геометрические приложения определённого интеграла

На практических занятиях по высшей математике мы использовали определённый интеграл для нахождения площадей фигур, объёмов тел вращения, длин дуг кривых.

2.1. Вычисление площадей

Пусть на плоскости введена ***декартова прямоугольная система координат Оху***. Рассмотрим фигуру F, лежащую в этой плоскости, которая ограничена сверху линией, заданной уравнением $y = f(x)$, снизу – линией, заданной уравнением $y = g(x)$, слева – прямой, заданной уравнением $x = a$, справа – прямой, заданной уравнением $x = b$ (рисунок 6.5).

Площадь этой фигуры $S(F)$ вычисляется по формуле

$$S(F) = \int_{a}^{b} \left(f(x) - g(x) \right) dx . \tag{21}$$

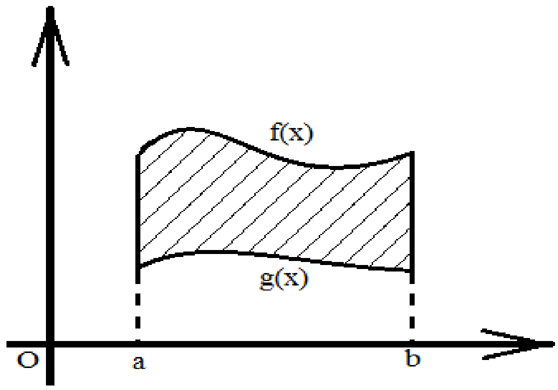


Рисунок 6.5 – Фигура в декартовой прямоугольной системе координат

Если на плоскости введена ***полярная система координат***, то площадь фигуры F, ограниченной полярными лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и линией, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ (рисунок 6.6),

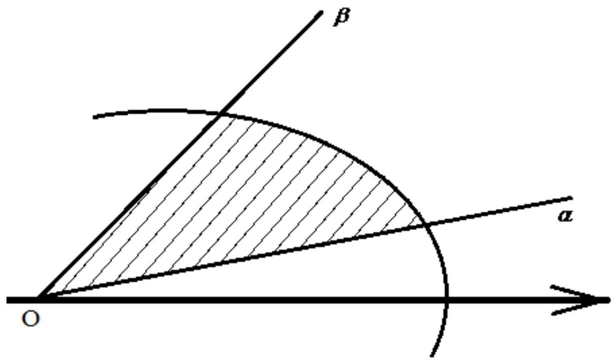


Рисунок 6.6 – Фигура в полярной системе координат

можно найти по формуле

$$S(F) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\left(\rho(\varphi)\right)^2 d\varphi. \tag{22}$$

2.2. Объём тела вращения

Определённый интеграл можно использовать для нахождения объёма тела вращения.

Пусть на плоскости введена декартова прямоугольная система координат Oxy. Рассмотрим дугу AB, заданную в этой системе координат уравнением $y = f(x)$, где $x \in [a;\ \ b]$. Будем вращать дугу AB вокруг оси Ox.

Она опишет в пространстве поверхность вращения (рисунок 6.7):

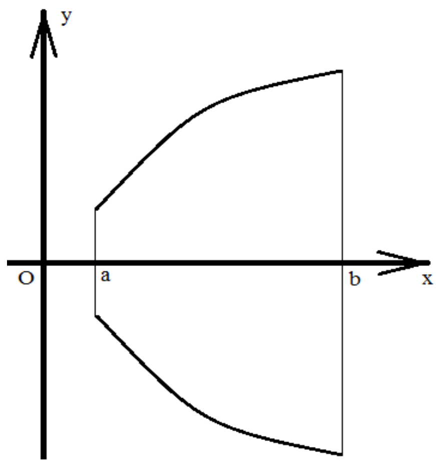


Рисунок 6.7 – Сечение поверхности вращения вокруг оси Ox

Объём тела, ограниченного этой поверхностью и плоскостями $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx. \tag{23}$$

Если тело получено вращением дуги AB вокруг оси Oy (рисунок 6.8), то, учитывая, что $y_1 = f(a)$ и $y_2 = f(b)$, формула (23) примет вид:

$$V_{Oy} = \pi \int_{y_1}^{y_2} \left(g(y) \right)^2 dy, \tag{24}$$

где $g(y) = f^{-1}(y)$ – обратная функция к $y = f(x)$.

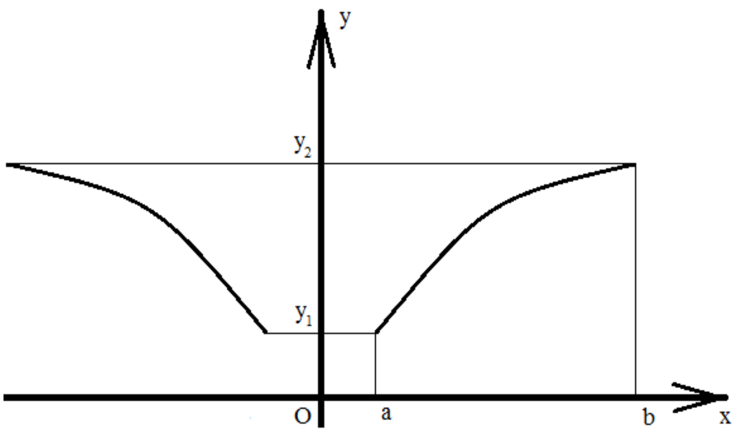


Рисунок 6.8 – Сечение поверхности вращения вокруг оси Oy

2.3. Длина дуги кривой

С помощью определённого интеграла можно находить длины дуг плоских и пространственных линий. Рассмотрим несколько формул, которые позволяют находить длину дуги в зависимости от способа задания линии.

Пусть дуга АВ лежит в плоскости, на которой введена ***декартова прямоугольная система координат Oxy*** (рисунок 6.9). Уравнение этой дуги $y = f(x)$.

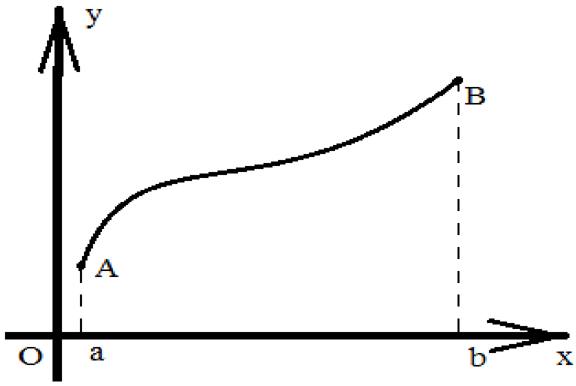


Рисунок 6.9 – Дуга в декартовой прямоугольной системе координат

Тогда длина l дуги АВ находится по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx, \tag{25}$$

здесь $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$.

Если дуга АВ на плоскости задана ***параметрическими уравнениями:***

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

то длина l дуги АВ может быть найдена по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt, \tag{26}$$

где t_1 – параметр, соответствующий точке А, t_2 – параметр, соответствующий точке В.

Пусть на плоскости введена ***полярная система координат*** и дуга АВ задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ (рисунок 6.10).

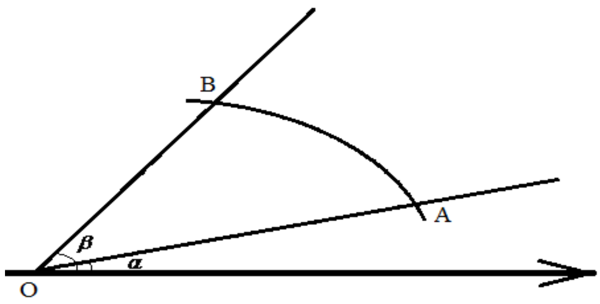


Рисунок 6.10 – Дуга в полярной системе координат

В этом случае длина l дуги AB, где $\alpha \le \varphi \le \beta$, находится по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi. \tag{27}$$

Если дуга AB – пространственная, то в декартовой прямоугольной системе координат Oxyz мы можем задать её параметрически тремя равенствами:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Тогда для длины l дуги AB справедлива формула

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt,$$

где t_1 – параметр, соответствующий точке A; t_2 – параметр, соответствующий точке B.

Рассмотрим теперь примеры на вычисление площадей, объёмов и длин дуг.

Задание 4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной двумя параболами: $y_1 = x^2 + 2x - 9$, $y_2 = -x^2 + 6x - 3$.

Решение. 1. Задайте функции:

$$y1 := x^2 + 2 \cdot x - 9,$$

$$y2 := -x^2 + 6 \cdot x - 3.$$

2. Найдите точки пересечения парабол, решив уравнение y1=y2 с помощью команды **solve**. Наберите

$$\mathrm{solve}(y1-y2\,;\,x)$$

и нажмите равно.

Получите решение:

$$\mathrm{solve}(y1-y2\,;\,x)=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}.$$

3. Точки пересечения парабол также можно определить по графику. Постройте графики в одной системе координат (правила построения графиков мы изучали в Лабораторной работе 2):

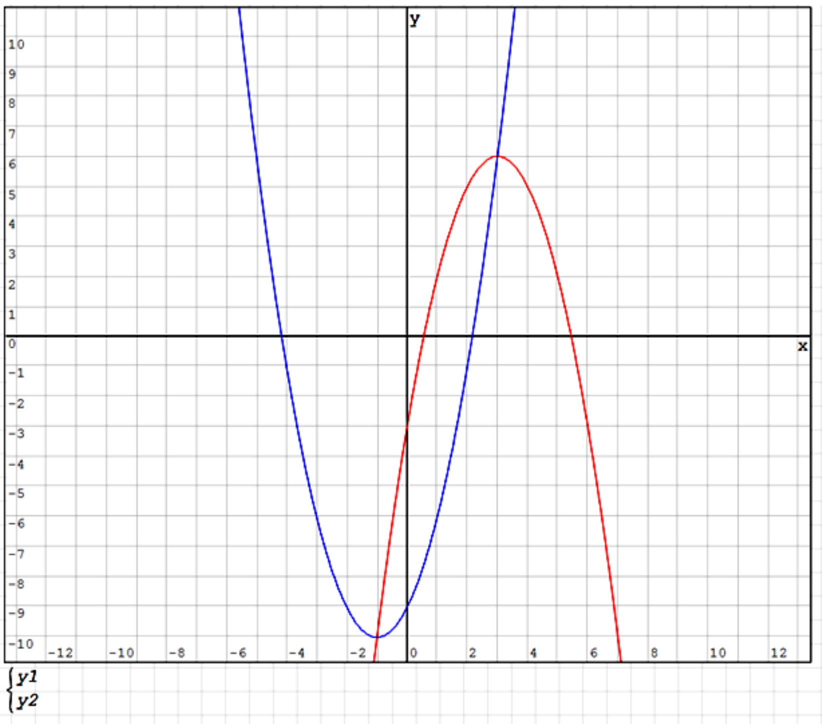


Рисунок 6.11 – Графики функций $y_1=x^2+2x-9,\ y_2=-x^2+6x-3$

По графику видно, что абсциссы точек пересечения функций:

$$a=-1,$$

$$b=3.$$

4. Так как линии заданы в декартовой прямоугольной системе координат, то площадь фигуры вычисляем по формуле (21):

$$S := \int_{-1}^{3} (y2 - y1)\, d\,x,$$

$$S = 21{,}3333.$$

Задание 5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линией, заданной в полярной системе координат уравнением $r = 5\sin 3\varphi$. Постройте график этой линии.

Решение. 1. Задайте функцию

$$r(\varphi) := 5 \cdot \sin(3 \cdot \varphi)$$

и интервал изменения аргумента этой функции [0; 2π] с шагом $\dfrac{\pi}{100}$:

$$\varphi := \left[0; \frac{\pi}{100} .. (2 \cdot \pi)\right].$$

2. В лабораторной работе 2 мы подробно рассматривали построение графиков функций, заданных в полярной системе координат.

Для построения графика такой функции перейдите к параметрическим координатам:

$$X := r(\varphi) \cdot \cos(\varphi),$$

$$Y := r(\varphi) \cdot \sin(\varphi).$$

3. Для построения графика векторизуйте функции X и Y и объедините $\overrightarrow{X}$ и $\overrightarrow{Y}$ в одну матрицу *f*(x) с помощью оператора ***augment***:

$$f(x) := \text{augment}\left(\overrightarrow{X}; \overrightarrow{Y}\right).$$

(Напомним, что кнопка векторизации  находится на боковой панели «Матрицы»).

4. Постройте график:

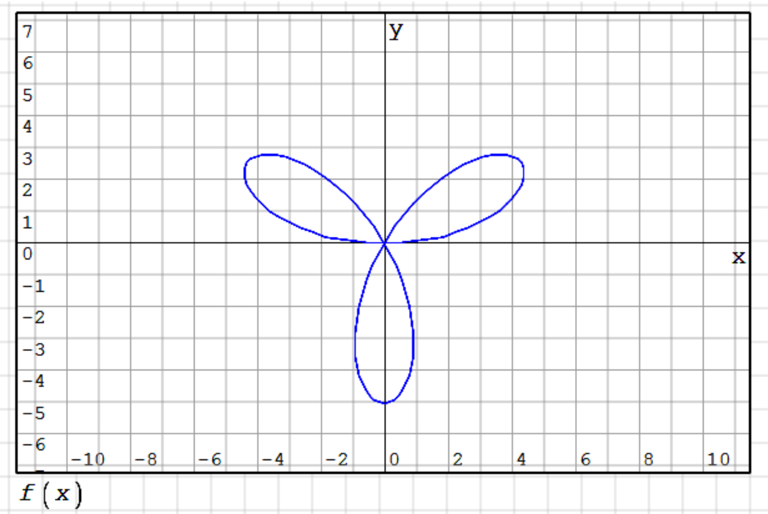


Рисунок 6.12 – График функции $r = 5\,sin\,3\varphi$

5. Так как линия задана в полярной системе координат, то площадь фигуры вычислите по формуле (22):

$$S := \int_0^{2\cdot\pi} \frac{1}{2}\cdot\left(r(\varphi)\right)^2 d\varphi\ ,$$

$$S = 39{,}2699\ .$$

Задание 6. Найдите объём тела, полученного при вращении полуволны синусоиды *y* = 3*cosx* вокруг оси Ох.

Решение. 1. Задайте функцию:

$$y(x) := 3\cdot\cos(x)\ .$$

2. Постройте график функции:

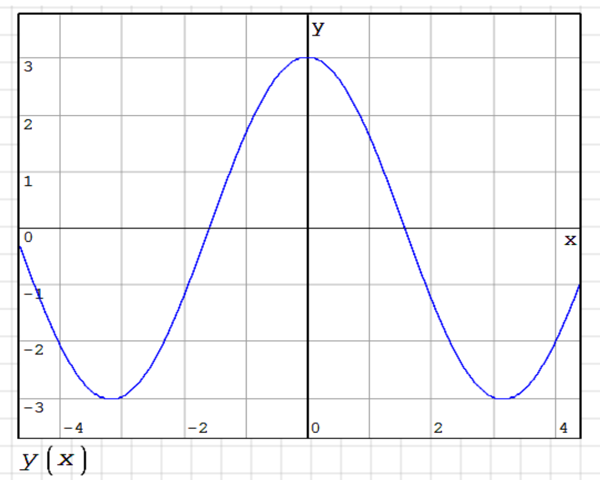


Рисунок 6.13 – График функции *y* = 3*cosx*

3. Чтобы найти объём тела, полученного при вращении полуволны синусоиды, вам необходимо определить абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ох, то есть решить уравнение y(x)=0.

Решите это уравнение с помощью команды **solve.** Однако, если вы наберете:

$$\mathrm{solve}(y(x);x),$$

то получите:

$$\mathrm{solve}(y(x);x)=\begin{bmatrix}-17{,}2788\\-14{,}1372\\-10{,}9956\\-7{,}854\\-4{,}7124\\-1{,}5708\\1{,}5708\\4{,}7124\\7{,}854\\10{,}9956\\14{,}1372\\17{,}2788\end{bmatrix},$$

поскольку функция *y*=3*cosx* бесконечная периодическая и её график пересекает ось Ох бесконечное число раз.

По графику видно, что абсциссы точек пересечения полуволны графика находятся в промежутке [−2; 2]. Поэтому, чтобы найти две требуемые точки пересечения, используйте команду:

$$\mathrm{solve}(y(x);x;-2;2).$$

Нажмите равно, чтобы получить ответ:

$$\mathrm{solve}(y(x);x;-2;2)=\begin{bmatrix}-1{,}5708\\1{,}5708\end{bmatrix}.$$

То есть полуволна заданной синусоиды получается при значении переменной $-1{,}5708 \le x \le 1{,}5708$.

Объём тела вращения полуволны синусоиды вокруг оси Ox найдите по формуле (23):

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

$$V := \pi \cdot \int_{-1,5708}^{1,5708} (y(x))^2\,dx,$$

$$V = 44,4132.$$

Задание 7. Вычислите объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $3y^2 = x^3$ и $y = 3$.

Решение. 1. Чтобы построить график данной функции, необходимо выразить y через x:

$$y^2 = \frac{x^3}{3},$$

$$y_1 = -\sqrt{\frac{x^3}{3}},$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{x^3}{3}}.$$

2. Задайте функции:

$$y1(x) := \sqrt{\frac{x^3}{3}},$$

$$y2(x) := -\sqrt{\frac{x^3}{3}}.$$

3. Постройте в одной системе координат графики функций y1(x), y2(x) и y=3 (рисунок 6.14):

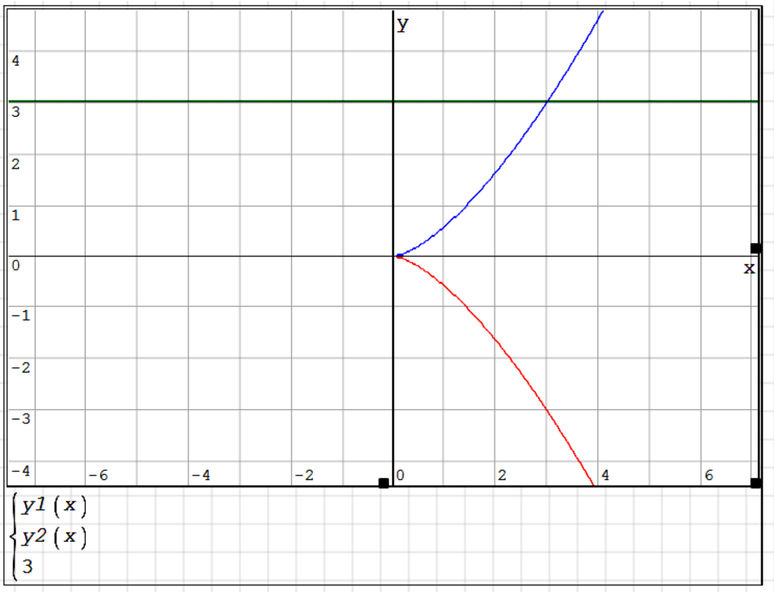


Рисунок 6.14 – Графики функции y1(x), y2(x) и y=3

4. Чтобы вычислить объем тела вращения вокруг оси Oy по формуле (24):

$$V_{Oy} = \pi \int_{y_1}^{y_2} \left(g(y)\right)^2 dy,$$

необходимо выразить *x* через *y*:

$$x = \sqrt[3]{3y^2}\ .$$

Задайте функцию:

$$x(y) := \sqrt[3]{3 \cdot y^2}\ .$$

По графику определите пределы интегрирования: $y_1=0$, $y_2=3$.

Объём тела вращения вокруг оси Oy найдите по формуле (24):

$$V := \pi \cdot \int_0^3 \left(x(y)\right)^2 \, dy\ ,$$

$$V = 36{,}3527\ .$$

Задание 8. Найдите длину дуги линии $y = \frac{x^2}{2} - 6$, которую отсекает ось Ох.

Решение. На выполнение данного задания влияют величины, входящие в предыдущие задания. Поэтому для выполнения задания 7 создайте новый документ, например с помощью кнопки 🗋 на Стандартной панели инструментов.

1. Задайте функцию:

$$y(x) := \frac{x^2}{2} - 6$$.

2. Постройте заданную линию:

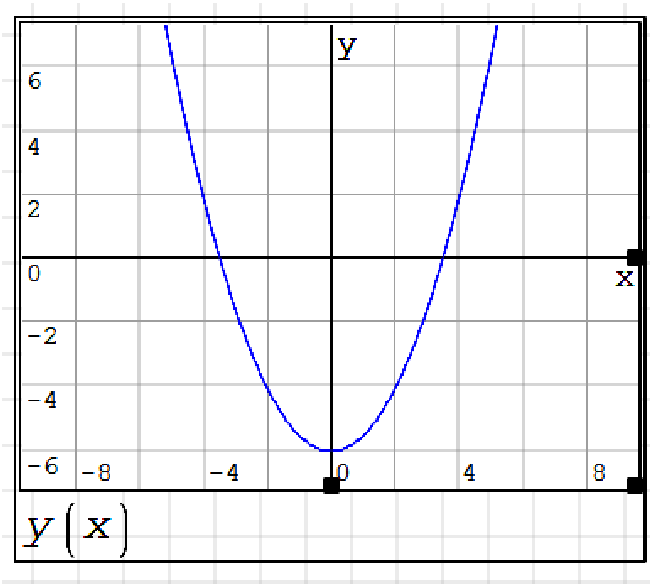


Рисунок 6.15 – График функции $y = \frac{x^2}{2} - 6$

Пределами интегрирования будут абсциссы точек пересечения графика с осью Ох. По графику видно, что эти точки не целые. Поэтому чтобы их найти, необходимо решить уравнение $y(x) = 0$. Это можно сделать с помощью команды **solve:**

$$\text{solve}(y(x);\, x) = \begin{bmatrix} -3,4641 \\ 3,4641 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислите длину кривой по формуле (25), используя в качестве пределов интегрирования найденные командой **solve** значения:

$$L := \int_{-3,4641}^{3,4641} \sqrt{1 + \left(\frac{d}{d\,x} y(x)\right)^2}\, d\,x.$$

$$L = 14,4458.$$

Задание 9. Определите длину дуги, заданной параметрически уравнениями:

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases},$$

если $0 \le t \le \pi$.

Решение. 1. Задайте функции x(t), y(t):

$$x(t) := \mathbf{e}^{t} \cdot \cos(t),$$

$$y(t) := \mathbf{e}^{t} \cdot \sin(t).$$

2. Задайте промежуток изменения аргумента t от 0 до π с шагом 0,001:

$$t := [0;0,001\,..\,\pi].$$

3. Для построения графика векторизуйте функции x(t) и y(t) и объедините $\overrightarrow{x(t)}$ и $\overrightarrow{y(t)}$ в одну матрицу *f*(x) с помощью оператора ***augment***:

$$f(x) := \text{augment}\left(\overrightarrow{x(t)};\, \overrightarrow{y(t)}\right).$$

(Напомним, что кнопка векторизации  находится на боковой панели «Матрицы», см. лабораторную работу 2).

4. Постройте график:

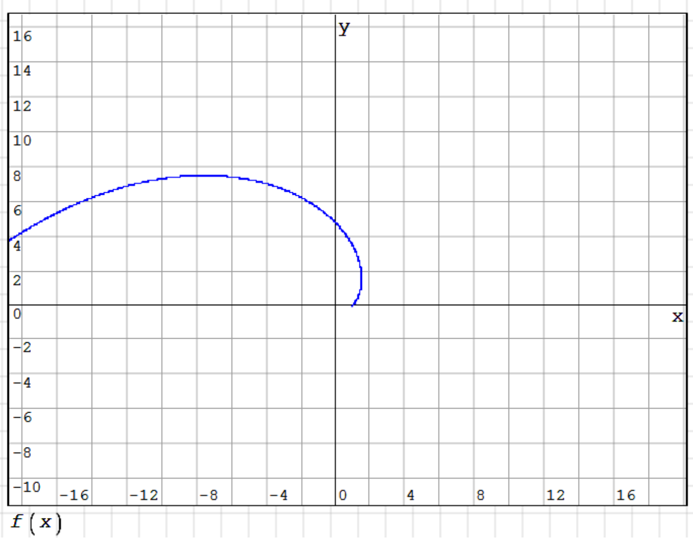


Рисунок 6.16 – График функции $\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$

5. Длину дуги, заданной параметрически, вычислите по формуле (26):

$$L := \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2}\, dt,$$

$$L = 31,3117.$$

Задание 10. Найдите длину дуги, заданной в полярной системе координат уравнением $r = 3(1 - \sin\varphi)$, где $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Решение. 1. Задайте функцию:

$$r(\varphi) := 3 \cdot (1 - \sin(\varphi))$$

и интервал изменения аргумента этой функции $0 \le \varphi \le 2\pi$ с шагом 0,01:

$$\varphi := [0; 0,01 .. (2 \cdot \pi)].$$

2. Для построения графика функции перейдите к параметрическим координатам:

$$X := r(\varphi) \cdot \cos(\varphi),$$

$$Y := r(\varphi) \cdot \sin(\varphi).$$

3. Для построения графика векторизуйте функции X и Y и объедините $\vec{X}$ и $\vec{Y}$ в одну матрицу *f*(x) с помощью оператора ***augment***:

$$f(x) := \mathrm{augment}\left(\vec{X};\ \vec{Y}\right).$$

4. Постройте график:

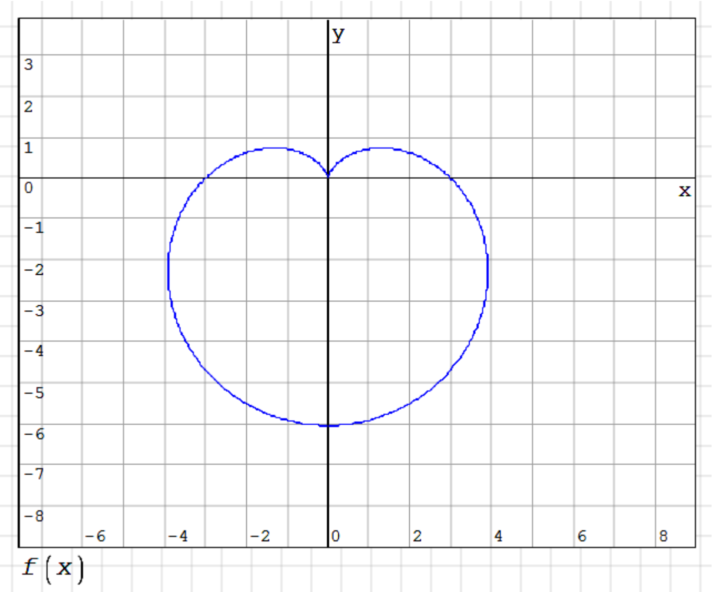


Рисунок 6.17 – График функции $r = 3(1 - \sin\varphi)$

5. Так как линия задана в полярной системе координат, то длину дуги вычислите по формуле (27):

$$L := \int_0^{2\cdot\pi} \sqrt{r(\varphi)^2 + \left(\frac{d}{d\varphi} r(\varphi)\right)^2}\, d\varphi,$$

$$L = 24.$$

Контрольные вопросы

1. Какой оператор в SMathStudio служит для нахождения определенного интеграла?
2. На какой панели инструментов находится оператор «определенный интеграл»?
3. В чем состоит различие в выборе знаков = и → при вычислении определенного интеграла в SMathStudio?

4. Опишите алгоритм вычисления в SMathStudio площади фигуры в декартовой прямоугольной системе координат.

5. Как в SMathStudio найти площади фигуры в полярной системе координат?

6. Как в SMathStudio найти объем тела вращения вокруг оси Ох?

7. Как в SMathStudio найти объем тела вращения вокруг оси Оу?

8. Опишите алгоритм вычисления в SMathStudio длины дуги в декартовой прямоугольной системе координат.

9. Как в SMathStudio найти длину дуги в полярной системе координат?

10. Как в SMathStudio найти длину дуги, заданной параметрическими уравнениями?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

Применение SMathStudio для решения некоторых видов уравнений и систем уравнений

Цель работы: Научиться решать в SMathStudio алгебраические, иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические уравнения и системы уравнений.

1. Решение алгебраических уравнений

Уравнение вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, где $n \geq 1$, называется алгебраическим уравнением n-ой степени относительно x.

Числа a_0, a_1, …, a_n, где $a_n \neq 0$, называются коэффициентами алгебраического уравнения. Например, линейное уравнение $ax + b = 0$ является алгебраическим уравнением первой степени, квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ – алгебраическим уравнением второй степени, кубическое уравнение – третьей и т.д.

Часто алгебраическое уравнение записывают в виде $P_n(x) = 0$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Любое алгебраическое уравнение в SMathStudio может быть решено с помощью встроенной функции **polyroots(V)**. Эта функция находит все n корней алгебраического уравнения n-ой степени (как действительные, так и комплексные). Выдаёт ответ в виде вектора, координатами которого являются корни многочлена $P_n(x)$.

Аргументом этой функции (в данной записи – V) является вектор, координатами которого являются коэффициенты многочлена $P_n(x)$:

$$V = (a_0, a_1, ..., a_n).$$

Функцию polyroots(V) можно вызвать различными способами:

1. Выбрать команду Вставка – Функция главного меню (вверху экрана);
2. С помощью кнопки  Стандартного меню;
3. Нажать комбинацию клавиш Ctrl+E.

В результате любого из перечисленных действий на экране появится окно (рисунок 7.1):

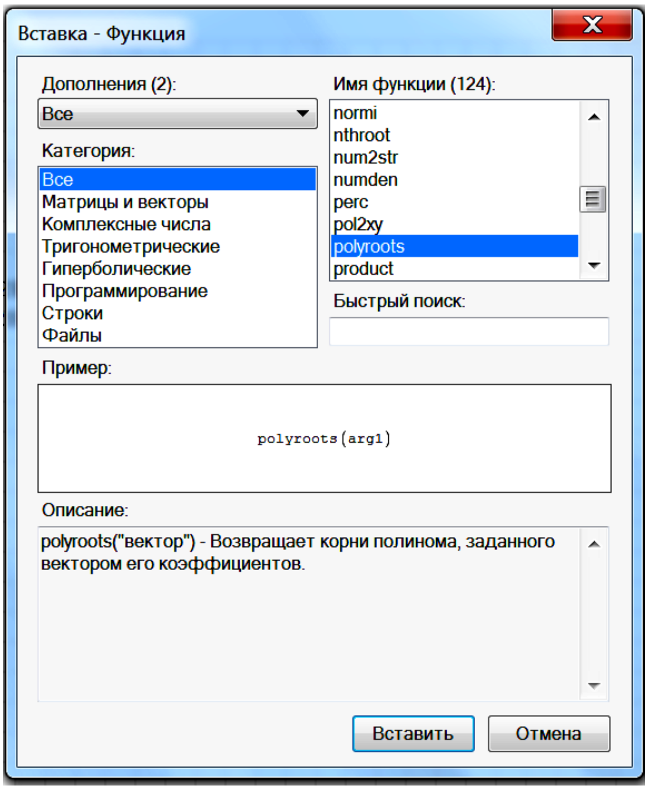
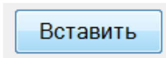
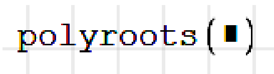


Рисунок 7.1 – Окно «Вставка–Функции»

В правой части окна вы увидите список функций (окно «Имя функции»).

Из списка функций выберите polyroots и нажмите 

, на экране появится:



.

4. Также можно набрать с клавиатуры на английской раскладке **po**, на экране появится список функций (рисунок 7.2):

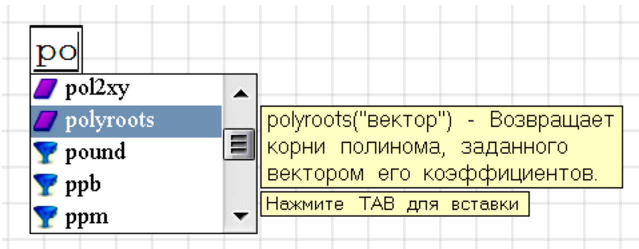


Рисунок 7.2 – Иллюстрация одного из способов вызова функции polyroots

Из списка выбрать функцию polyroots и нажать клавишу Tab, на экране появится:

polyroots(■).

На месте чёрного квадратика необходимо ввести вектор коэффициентов многочлена $P_n(x)$:

$$V=\left(a_0,\,a_1,\ldots,a_n\right).$$

Вектор коэффициентов можно задать предварительно (заранее). А можно непосредственно в функции polyroots.

Разберем решение алгебраических уравнений на примерах.

Задание 1. Найдите решения уравнения $x^3+4x^2+6x-1=0$ с точностью два знака после десятичной точки. Подтвердите наличие действительных корней уравнения графически.

Решение. 1. При помощи кнопки  бокового меню «Матрицы» введите вектор коэффициентов уравнения:

$$V:=\begin{bmatrix}-1\\6\\4\\1\end{bmatrix}.$$

2. С помощью кнопки  Стандартного меню выведите на экран встроенную функцию polyroots:

polyroots(■),

в поле ввода введите аргумент V и нажмите знак равенства, на экране отобразится:

$$\text{polyroots}(V)=\begin{bmatrix}0{,}1509\\-2{,}0755+1{,}5228\cdot i\\-2{,}0755-1{,}5228\cdot i\end{bmatrix}.$$

То есть исходное уравнение имеет три корня: два комплексных и один действительный.

Стандартно корни округляются программой SMathStudio до четырёх знаков после десятичной точки.

Можно изменить точность, нажав правой копкой мыши на черный квадратик справа от результата вычисления и выбрав в появившемся меню «Точность ответа».

3. Установите точность ответа – два знака после десятичной точки:

$$\mathrm{polyroots}(V)=\begin{bmatrix} 0,15 \\ -2,08+1,52\cdot i \\ -2,08-1,52\cdot i \end{bmatrix}$$.

4. Подтвердите наличие действительного корня исходного уравнения графически. Для этого постройте график функции $y(x)=x^3+4x^2+6x-1$ (рисунок 7.3):

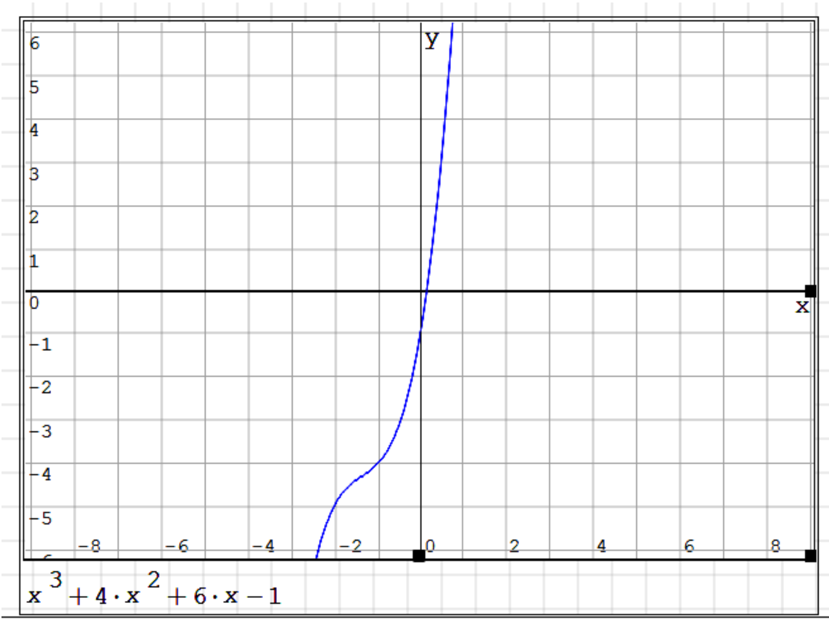


Рисунок 7.3 – График функции $y(x)=x^3+4x^2+6x-1$

Абсцисса точки пересечения графика функции *f(x)* с осью *Ox* и есть действительный корень заданного уравнения.

Задание 2. Найдите решения уравнения $x^2+99x-100=0$, не задавая предварительно вектор коэффициентов уравнения.

Решение. Выведите на экран функцию polyroots любым из четырёх вышеописанных способов:

$$\mathrm{polyroots}(\blacksquare),$$

в поле ввода введите с помощью кнопки бокового меню «Матрицы» вектор коэффициентов:

$$\mathrm{polyroots}\left(\begin{bmatrix} -100 \\ 99 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Нажмите знак равенства, на экране отобразится результат:

$$\mathrm{polyroots}\left(\begin{bmatrix} -100 \\ 99 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -100 \end{bmatrix} \blacksquare$$

То есть исходное уравнение имеет два целых действительных корня.

Задание 3. Найдите решения уравнения $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$. Подтвердите наличие действительных корней уравнения графически.

Решение. 1. Выведите на экран функцию polyroots и в поле ввода введите вектор коэффициентов:

$$\mathrm{polyroots}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Обратите внимание, что в уравнении отсутствуют x и x^3, поэтому в векторе коэффициентов на их месте стоят нули.

Нажмите знак равенства, на экране отобразится результат:

$$\mathrm{polyroots}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -0,874 \\ 0,874 \\ -2,2882 \\ 2,2882 \end{bmatrix}.$$

Исходное уравнение имеет четыре действительных корня: $x_1 = -0{,}874$, $x_2 = 0{,}874$, $x_3 = -2{,}2882$, $x_4 = 2{,}2882$.

2. Подтвердите найденные решения графически. Для этого постройте график функции $y(x) = x^4 - 6x^2 + 4$ (рисунок 7.4):

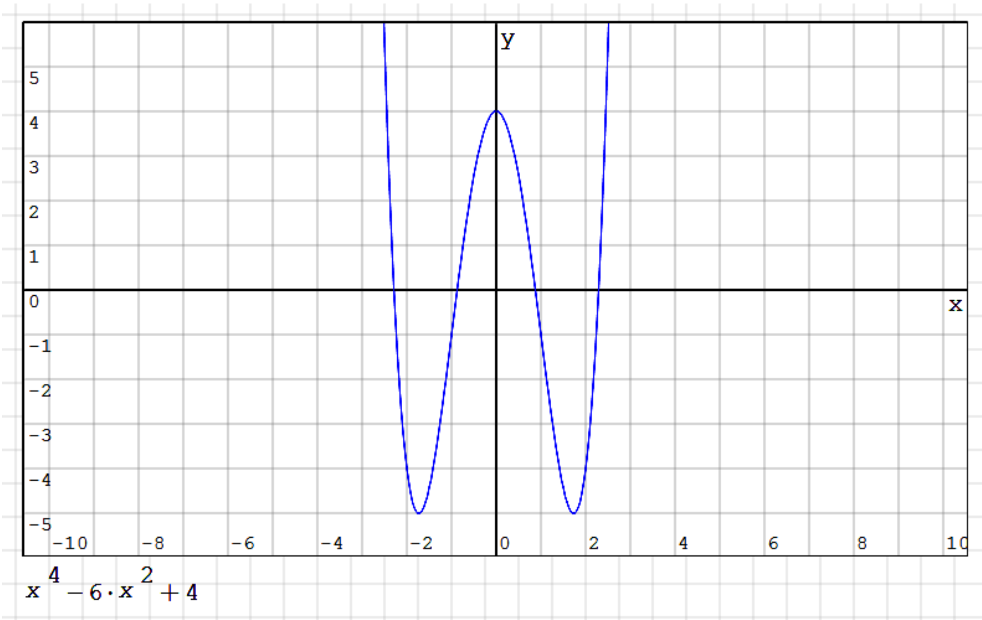


Рисунок 7.4 – График функции $y(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

Точки с абсциссами $x_1 = -0{,}874$, $x_2 = 0{,}874$, $x_3 = -2{,}2882$, $x_4 = 2{,}2882$ являются точками пересечения графика с осью Ox.

2. Решение иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений

Указанные уравнения изучаются в курсе алгебры средней общеобразовательной школы. Рассмотрим различные способы решения этих уравнений в SMathStudio.

Разберём на примере решение иррационального уравнения.

Задание 4. Найдите решения уравнения $\sqrt[3]{(x-3)^2} = \sqrt[3]{x}$.

Решение. 1. Преобразуйте в тетради заданное уравнение к виду:

$$\sqrt[3]{(x-3)^2} - \sqrt[3]{x} = 0.$$

2. Введите левую часть преобразованного уравнения в рабочем окне SMathStudio:

$$\sqrt[3]{(x-3)^2}-\sqrt[3]{x}.$$

3. Выделите курсором переменную *x* (она окрасится в синий цвет):

$$\boxed{\sqrt[3]{(x-3)^2}-\sqrt[3]{x}}.$$

4. На Основной панели вверху экрана выберите команду **Вычисление – Найти корни**:

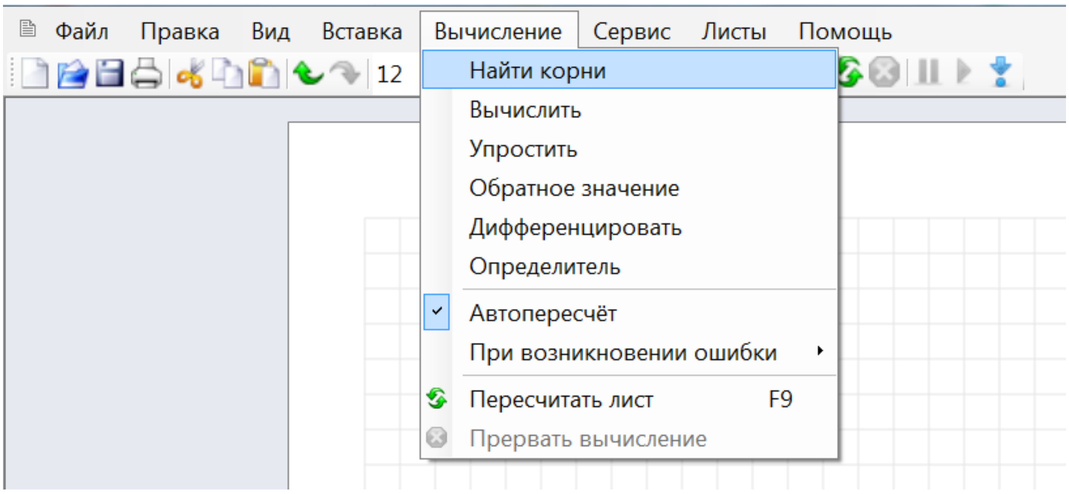


Рисунок 7.5 – Вид окна «Вычисление–Найти корни»

На экране отобразится результат:

$$\begin{bmatrix} 1,69722435481478 \\ 5,30277567660215 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим второй способ решения этого же иррационального уравнения с помощью функции **solve**.

Функцию solve, как и функцию polyroots, можно вызвать следующими способами:

1. Выбрать команду Вставка – Функция главного меню.
2. С помощью кнопки  Стандартного меню.
3. Нажать комбинацию клавиш Ctrl+E.

В результате любого из перечисленных действий на экране появится окно (рисунок 7.6):

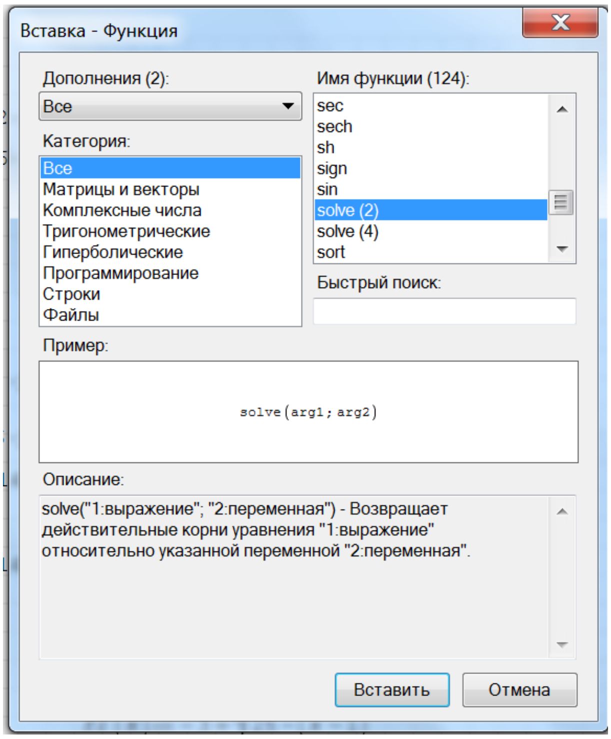
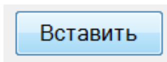


Рисунок 7.6 – Выбор функции solve в окне «Вставка–Функции»

В правой части окна вы увидите список функций (окно «Имя функции»). Из списка функций выберите solve(2) или solve(4) и нажмите 

.

4. Также можно набрать с клавиатуры на английской раскладке **so** и в появившемся списке выбрать solve(2) или solve(4):

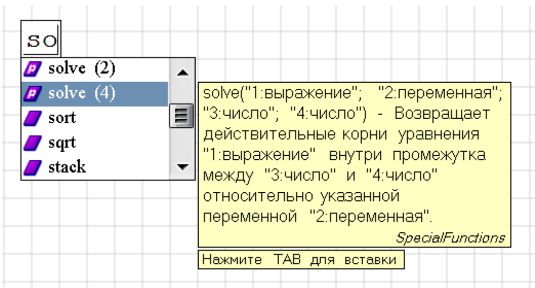
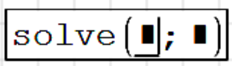
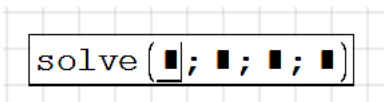


Рисунок 7.7 – Иллюстрация одного из способов вызова функции solve

Затем нажать клавишу Tab, на экране появится:



или



.

Задание 5. Найдите решения уравнения $\sqrt[3]{(x-3)^2}=\sqrt[3]{x}$ с помощью функции **solve(2)**.

Решение 1. Как и в предыдущем примере преобразуйте в тетради заданное уравнение к виду:

$$\sqrt[3]{(x-3)^2}-\sqrt[3]{x}=0.$$

2. С помощью кнопки Стандартного меню выведите на экран встроенную функцию solve(2):

$$\boxed{\mathrm{solve}(\blacksquare;\ \blacksquare)}.$$

Замечание: Функцию solve также можно вызвать любым из рассмотренных выше способов.

Формат функции содержит два поля ввода. В первое поле необходимо ввести левую часть уравнения $\sqrt[3]{(x-3)^2}-\sqrt[3]{x}=0$, а во второе поле – имя неизвестной, то есть *x*:

$$\mathrm{solve}\left(\sqrt[3]{(x-3)^2}-\sqrt[3]{x};\ x\right).$$

Нажмите знак равенства, на экране отобразится результат:

$$\boxed{\mathrm{solve}\left(\sqrt[3]{(x-3)^2}-\sqrt[3]{x};\ x\right)=\begin{bmatrix}1{,}6972\\5{,}3028\end{bmatrix}\blacksquare}.$$

Как уже упоминалось ранее, корни округляются программой SMathStudio до четырёх знаков после десятичной точки. Можно изменить точность, нажав правой кнопкой мыши на черный квадратик справа от результата вычисления и выбрав в появившемся меню «Точность ответа».

Задание 6. Проверьте графически, сколько корней имеет уравнение $\frac{e^x}{5}-2\cdot(x-1)^2=0$. Найдите решения данного уравнения.

Решение. 1. Введите функцию:

$$f(x):=\frac{\mathbf{e}^x}{5}-2\cdot(x-1)^2.$$

2. Постройте график этой функции (рисунок 7.8):

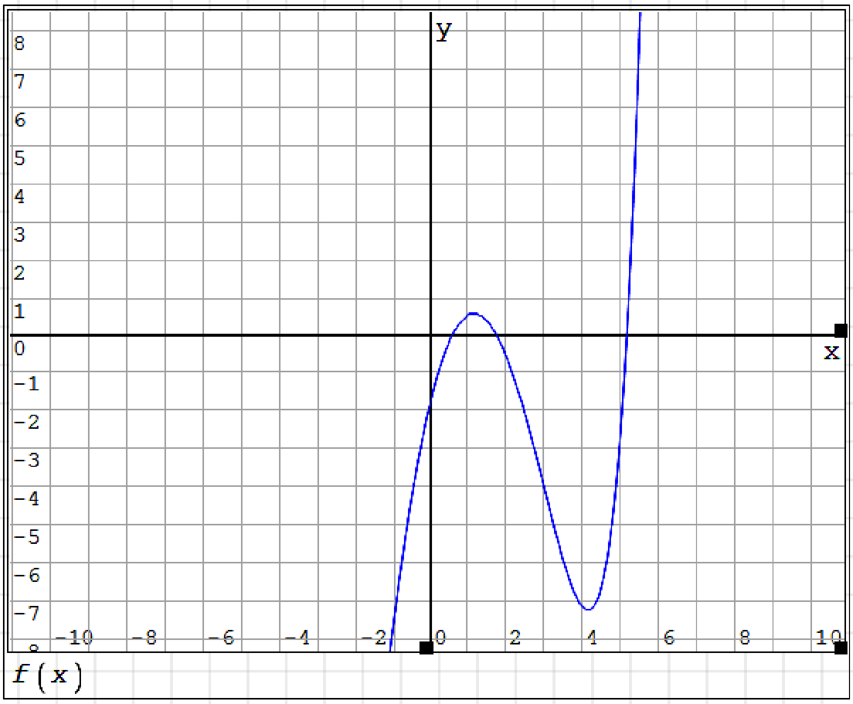


Рисунок 7.8 – График функции $\frac{e^x}{5} - 2 \cdot (x-1)^2 = 0$

График функции *f(x)* имеет три точки пересечения с осью Ох, следовательно, уравнение $\frac{e^x}{5} - 2 \cdot (x-1)^2 = 0$ имеет три корня.

3. Введите функцию solve(2) любым из рассмотренных ранее способов:

$$\boxed{\mathrm{solve}(\blacksquare;\ \blacksquare)}\ .$$

В первое поле введите имя функции *f(x)*, а во второе поле – имя неизвестной, то есть *x*, и нажмите знак равно.

Получите решение:

$$\mathrm{solve}(f(x);\ x) = \begin{bmatrix} 0{,}5778 \\ 1{,}7639 \\ 5{,}1477 \end{bmatrix} .$$

Следовательно, уравнение $\frac{e^x}{5} - 2 \cdot (x-1)^2 = 0$ имеет три корня: $x_1 = 0{,}5778$, $x_2 = 1{,}7639$, $x_3 = 5{,}1477$, что подтверждается графиком.

4. Также данное уравнение можно решить другим ранее рассмотренным способом (с помощью команды Вычисление – Найти корни).

Введите левую часть уравнения:

$$\frac{e^{x}}{5}-2\cdot(x-1)^{2}.$$

Выделите курсором переменную *x*:

$$\boxed{\frac{e^{x}}{5}-2\cdot(\boxed{x}-1)^{2}}.$$

5. На Основной панели вверху экрана выберите команду **Вычисление – Найти корни**, на экране отобразится результат:

$$\begin{bmatrix} 0{,}577841834353339 \\ 1{,}76387005093988 \\ 5{,}14768594981622 \end{bmatrix}.$$

Замечание: В этом случае SMathStudio не позволяет редактировать формат полученного ответа (количество знаков после десятичной точки и др.).

Рассмотрим теперь функцию **solve(4)**, которая позволяет находить корни уравнения *f(x)*=0 на заданном отрезке**.**

Функция solve(4) имеет формат

$$\boxed{\mathrm{solve}(\blacksquare;\ \blacksquare;\ \blacksquare;\ \blacksquare)}$$

и, в отличие от функции solve(2), содержит не два, а четыре поля ввода.

В первое поле вводят имя функции *f(x)*, во второе поле – имя неизвестной *x*, третье и четвертое поля предназначены для ввода начальных условий – границ диапазона локализации корней уравнения *f(x)=0.*

Границы локализации корня называют *начальными условиями* и обычно определяют графически.

Разберем применение функции **solve(4)** на следующем примере.

Задание 7. Найдите корни уравнения $cos\,3x = 0$ на отрезке [0; 4].

Решение. 1. Введите функцию:

$$f(x) := \cos(3 \cdot x)$$.

2. Постройте график этой функции (рисунок 7.9):

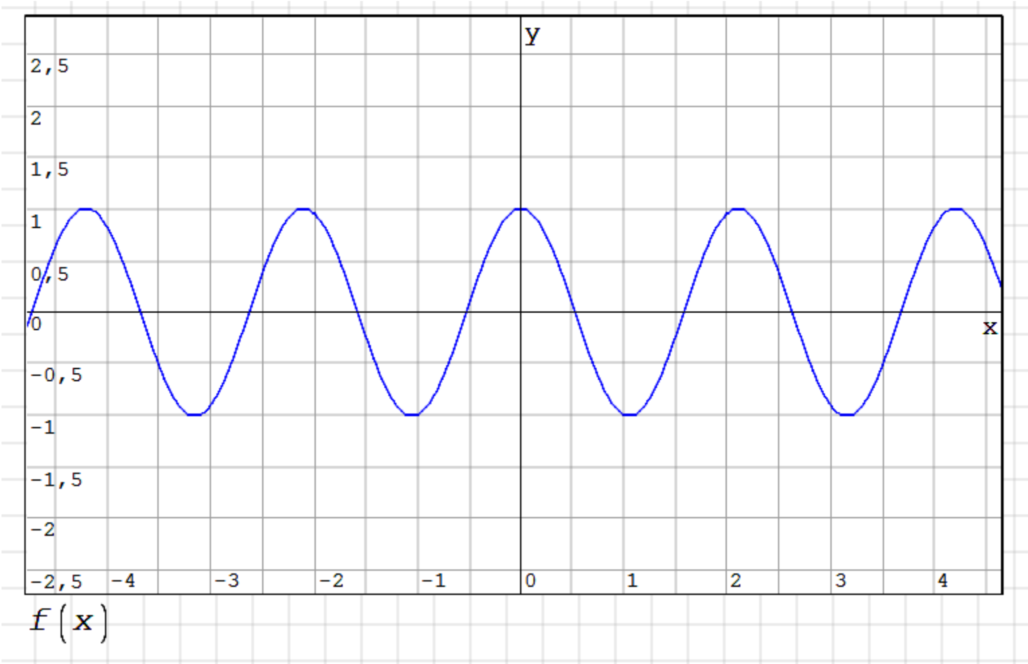


Рисунок 7.9 – График функции $f(x) = cos\,3x$

График функции $f(x) = cos\,3x$ имеет бесконечное множество точек пересечения с осью Ox, следовательно, уравнение $cos\,3x = 0$ имеет бесконечное множество корней.

3. Чтобы найти корни уравнения $cos\,3x = 0$ на отрезке [0; 4], используйте функцию solve(4).

Из графика видно, что отрезок [0; 4] содержит 4 точки пересечения функции $f(x) = cos\,3x$ с осью Ox, то есть уравнение $cos\,3x = 0$ имеет 4 корня на отрезке [0; 4]. Причем первый корень принадлежит отрезку [0; 1], второй – отрезку [1; 2], третий – отрезку [2; 3] и четвертый – отрезку [3; 4].

Введите функцию solve(4) любым из рассмотренных ранее способом, например, наберите so и в появившемся списке выберите solve(4):

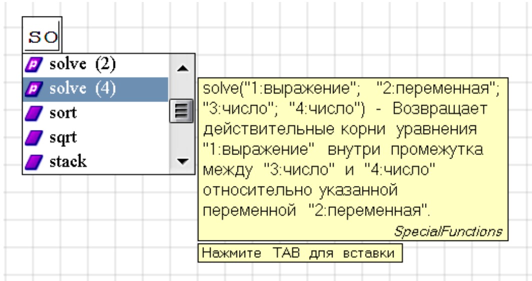


Рисунок 7.10 – Вызов функции solve

Нажмите клавишу Tab, на экране появится шаблон:

$$\mathrm{solve}(\blacksquare; \blacksquare; \blacksquare; \blacksquare).$$

Чтобы найти первый корень, принадлежащий отрезку [0; 1], в первое поле функции solve введите *f(x)*, во второе поле – *x*, в третье поле 0, в четвертое поле 1 и нажмите знак равно.

Получите:

$$\mathrm{solve}(f(x); x; 0; 1) = 0{,}5236.$$

Аналогично, чтобы найти второй корень, принадлежащий отрезку [1; 2], в третье поле введите 1, в четвертое поле введите 2 и нажмите знак равно.

Получите:

$$\mathrm{solve}(f(x); x; 1; 2) = 1{,}5708.$$

Чтобы найти третий корень, принадлежащий отрезку [2; 3], в третье поле введите 2, в четвертое поле введите 3 и нажмите знак равно.

Получите:

$$\mathrm{solve}(f(x); x; 2; 3) = 2{,}618.$$

И, наконец, чтобы найти четвертый корень, принадлежащий отрезку [3;4], в третье поле введите 3, в четвертое поле введите 4.

Получите:

$$\mathrm{solve}(f(x); x; 3; 4) = 3{,}6652.$$

3. Решение систем уравнений

В лабораторной работе № 3 мы уже рассматривали математическую задачу отыскания единственного решения линейной системы, состоящей из n уравнений относительно n неизвестных. В этих задачах мы использовали методы линейной алгебры.

Для решения систем уравнений, в том числе и нелинейных, в SMath-Studio используется функция **roots.**

Функцию roots можно вызвать способами, аналогичными тем, которыми мы пользовались для вызова функций polyroots и solve:

1. Выбрать команду Вставка – Функция главного меню.
2. С помощью кнопки  Стандартного меню.
3. Нажать комбинацию клавиш Ctrl+E.

В результате любого из перечисленных действий на экране появится окно (рисунок 7.11):

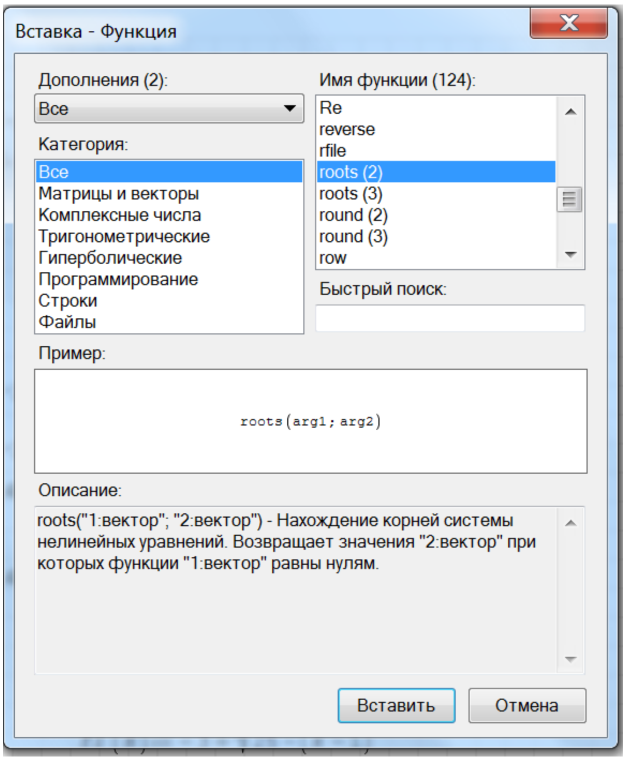
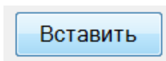


Рисунок 7.11 – Вызов функции roots через меню «Вставка – Функция»

В правой части окна вы увидите список функций (окно «Имя функции»). Из списка функций выберите roots(2) или roots(3) и нажмите 

.

4. Также можно набрать с клавиатуры на английской раскладке **ro** и в появившемся списке выбрать roots(2) или roots(3):

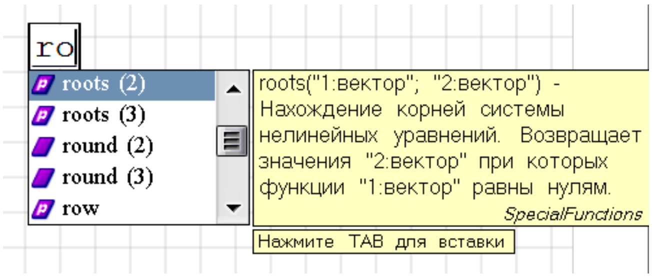
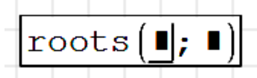
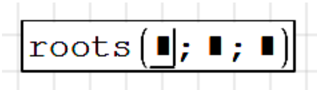


Рисунок 7.12 – Один из способов вызова функции roots

Затем нажать клавишу Tab, на экране появится:



или



.

Разберем применение функции **roots** на примере.

Задание 8. Решите систему уравнений:

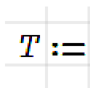
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y = 17 \\ x^2 + y^2 - 2x + 6y = 15 \end{cases}.$$

Сделайте проверку графически и аналитически.

Решение. 1. Преобразуйте в тетради систему к виду:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y - 17 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0 \end{cases}$$

2. Решение системы найдите в виде вектора $T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Для этого наберите:



.

Затем любым из вышеперечисленных способов вызовите функцию roots(2), например, наберите ro. В появившемся окне выберите roots(2) и нажмите клавишу Tab.

На экране появится:

$$T := \mathrm{roots}(\blacksquare; \blacksquare)$$.

В первом поле введите вектор-столбец из левых частей уравнений системы, во втором поле – вектор столбец неизвестных переменных:

$$T := \mathrm{roots}\left(\begin{bmatrix} x^2 + y^2 + 4\cdot x - 2\cdot y - 17 \\ x^2 + y^2 - 2\cdot x + 6\cdot y - 15 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$.

3. Чтобы получить результат, введите T=.

Получите:

$$T = \begin{bmatrix} 2,634 \\ 1,7255 \end{bmatrix}$$.

4. Решите теперь графически заданную систему. Для этого из каждого уравнения системы выразите в явном виде y через x.

Из первого уравнения системы получите:

$$x^2 + 4x + y^2 - 2y = 17;$$

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 2y + 1) - 1 = 17;$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 22;$$

$$(y-1)^2 = 22 - (x+2)^2;$$

$$y - 1 = \pm\sqrt{22 - (x+2)^2};$$

$$y = 1 \pm \sqrt{22 - (x+2)^2}.$$

То есть

$$y_1 = 1 + \sqrt{22 - (x+2)^2};$$

$$y_2 = 1 - \sqrt{22 - (x+2)^2}.$$

Проделайте аналогичные действия над вторым уравнение системы:

$$x^2-2x+y^2+6y=15;$$

$$(x^2-2x+1)-1+(y^2+6y+9)-9=15;$$

$$(x-1)^2+(y+3)^2=25;$$

$$(y+3)^2=25-(x-1)^2;$$

$$y+3=\pm\sqrt{25-(x-1)^2};$$

$$y=-3\pm\sqrt{25-(x-1)^2}.$$

То есть

$$y_3=-3+\sqrt{25-(x-1)^2};$$

$$y_4=-3-\sqrt{25-(x-1)^2}.$$

Чтобы построить графики, задайте в SMathStudio четыре функции – y1(x), y2(x) из первого уравнения системы и y3(x), y4(x) из второго уравнения:

$$y1(x):=1+\sqrt{22-(x+2)^2},$$

$$y2(x):=1-\sqrt{22-(x+2)^2},$$

$$y3(x):=-3+\sqrt{25-(x-1)^2},$$

$$y4(x):=-3-\sqrt{25-(x-1)^2}.$$

В одной системе координат постройте все четыре функции (рисунок 7.13).

Из чертежа видно, что система имеет два решения (две точки пересечения окружностей). Координаты (x, y) точек пересечения и являются решениями системы.

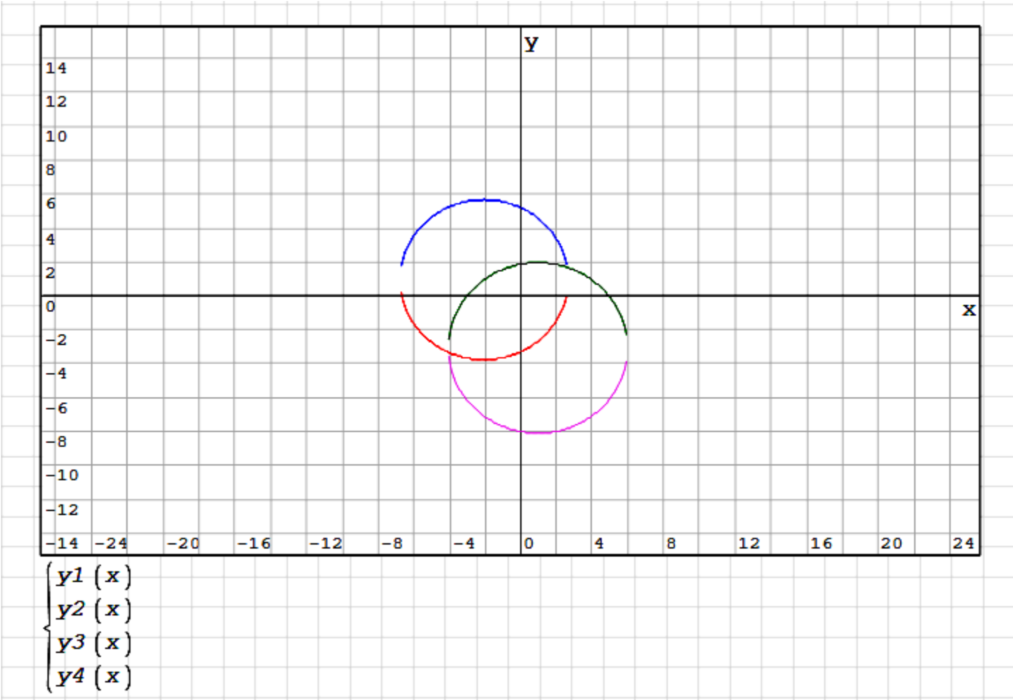


Рисунок 7.13 – Графики функций y1(x), y2(x), y3(x), y4(x)

Вы же, используя функцию roots(2), получили только одно решение:

$$T = \begin{bmatrix} 2,634 \\ 1,7255 \end{bmatrix}.$$

5. Чтобы найти второе решение, используйте функцию roots(3). Второе решение системы найдите в виде вектора $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Для этого наберите:

$$Z :=,$$

затем любым из вышеперечисленных способов вызовите функцию roots(3):

$$\boxed{Z := \mathrm{roots}(\blacksquare; \blacksquare; \blacksquare)}.$$

В первом поле введите вектор-столбец из левых частей уравнений системы, во втором поле – вектор столбец неизвестных переменных, в третьем поле введите *начальное условие* – это приближенные значения неизвестных *x*, *y* (определяем по графику).

У вас должно получиться следующее:

$$Z:=\mathrm{roots}\left(\begin{bmatrix} x^2+y^2+4\cdot x-2\cdot y-17 \\ x^2+y^2-2\cdot x+6\cdot y-15 \end{bmatrix};\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};\begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}\right).$$

6. Чтобы получить результат, введите Z=. Получите:

$$Z=\begin{bmatrix} -3,994 \\ -3,2455 \end{bmatrix}.$$

7. Итак, вы получили два решения системы:

$$T=\begin{bmatrix} 2,634 \\ 1,7255 \end{bmatrix},$$

$$Z=\begin{bmatrix} -3,994 \\ -3,2455 \end{bmatrix}.$$

Проверьте эти решения аналитически, то есть подставьте в уравнения системы:

$$\begin{cases} x^2+y^2+4x-2y=17 \\ x^2+y^2-2x+6y=15 \end{cases}.$$

Чтобы это сделать в SMathStudio, задайте две функции из левых частей уравнений системы:

$$F1(x;y):=x^2+y^2+4\cdot x-2\cdot y,$$

$$F2(x;y):=x^2+y^2-2\cdot x+6\cdot y.$$

Проверьте первое решение T, подставив его последовательно в уравнения системы.

Наберите:

$$F1\left(T_1;T_2\right)=.$$

Получите:

$$F1\left(T_1;T_2\right)=17.$$

Наберите:

$$F2\left(T_1; T_2\right)=$$.

Получите:

$$F2\left(T_1; T_2\right)=15$$.

Аналогично проверьте второе решение Z:

$$F1\left(Z_1; Z_2\right)=17$$,

$$F2\left(Z_1; Z_2\right)=15$$.

Проверка показала, что найденные решения верные.

Контрольные вопросы

1. Какая функция в SMathStudio служит для решения алгебраических уравнений?
2. Назовите несколько способов, которыми можно вызвать эту функцию?
3. Приведите способы решения иррационального уравнения в SMathStudio.
4. Как можно вызвать функцию solve?
5. В чем отличие функций solve(2) и solve(4)?
6. Какая функция в SMathStudio используется для решения систем уравнений?
7. Какими способами можно вызвать эту функцию?
8. В чем отличие функций roots(2) и roots (3)?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 8

Применение SMathStudio для решения задач теории вероятностей и математической статистики

Цель работы: Научиться решать задачи теории вероятностей и математической статистики в SMathStudio: строить многоугольник распределения случайной величины, находить функцию распределения и функцию плотности распределения случайной величины, вычислять числовые характеристики случайных величин, строить полигон частот, находить статистические оценки параметров распределения исследуемой величины.

1. Случайные величины. Функция и плотность распределения

Теория вероятностей изучает математические модели случайных явлений окружающего нас мира. Одно из центральных понятий теории вероятностей – понятие случайной величины.

Случайной величиной называется числовая функция, заданная на множестве случайных событий.

Например, случайной величиной является число очков, выпавших при бросании игральной кости, или рост случайно выбранного из учебной группы студента.

В первом случае мы имеем дело с *дискретной* случайной величиной. Она принимает значения из дискретного числового множества $M = \{1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 5,\ \ 6\}$.

Во втором случае – с *непрерывной* случайной величиной. Она принимает значения из непрерывного числового множества – из промежутка [150, 210] числовой прямой.

В дальнейшем случайные величины будем обозначать греческими буквами.

Каждая случайная величина полностью определяется своей функцией распределения. Если ξ – случайная величина, то функция

$F(x)=F_\xi(x)=P(\xi<x)$ называется *функцией распределения* случайной величины ξ. Здесь $P(\xi<x)$ – вероятность того, что случайная величина ξ принимает значение, меньшее x.

Если ξ – дискретная случайная величина, принимающая значения $x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots$ с вероятностями $p_1<p_2<\ldots<p_i<\ldots$, то таблица вида

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_i	$\ldots$

называется *рядом распределения* дискретной случайной величины или просто *распределением* случайной величины.

Функция распределения дискретной случайной величины, имеющей приведённое выше распределение, имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \ x<x_1 \\ p_1 & , \ x_1\le x<x_2 \\ p_1+p_2 & , \ x_2\le x<x_3 \\ \ldots & , \ \ldots \\ p_1+p_2+\ldots+p_{n-1} & , \ x_{n-1}\le x<x_n \\ 1 & , \ x\ge x_n \end{cases}$$

Функция распределения любой случайной величины обладает следующими свойствами:

1) $F(x)$ определена на всей числовой прямой R;

2) $F(x)$ не убывает;

3) $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$, т. е. $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$;

4) $F(x)$ непрерывна слева, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0-0}F(x)=F(x_0)$.

Если функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывна, то случайная величина ξ называется *непрерывной случайной величиной*.

Если функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывно дифференцируема, то более наглядное представление о случайной величине дает *плотность веро-*

ятности (распределения) случайной величины $p_\xi(x)$, которая связана с функцией распределения $F_\xi(x)$ формулами:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt,$$

$$p_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x). \qquad (28)$$

Отсюда, в частности, следует, что для плотности распределения любой случайной величины справедливо тождество

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(t)dt = 1.$$

Вероятность того, что значение случайной величины ξ попадёт в интервал (a,b), вычисляется для непрерывной случайной величины по формуле

$$P(a < \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int_{a}^{b} p_\xi(t)dt, \qquad (29)$$

а для дискретной случайной величины – по формуле

$$P(a < \xi < b) = \sum_{x_i \in (a,b)} p_i.$$

При решении практических задач случается сталкиваться с дискретными случайными величинами, распределёнными по биномиальному закону.

Биномиальное распределение (схема Бернулли): Пусть проводится серия из n независимых испытаний, каждое из которых заканчивается либо «успехом», либо «неуспехом».

Пусть в каждом испытании (опыте) вероятность успеха p, а вероятность неудачи $q = 1 - p$. С таким испытанием можно связать случайную величину ξ, равную числу успехов в серии из n испытаний. Эта величина принимает целые значения от 0 до n. Ее распределение называется *биномиальным* и определяется *формулой Бернулли*:

$$p_k = P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (30)$$

где

$$0 < p < 1$$

$$k = 0, \quad 1, \quad \dots, \quad n$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{31}$$

Можно проверить, что

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1.$$

При решении практических задач с *непрерывными* случайными величинами часто приходится сталкиваться со случайными величинами, распределёнными по *нормальному закону распределения*.

Нормальное распределение: Случайная величина ξ нормально распределена с параметрами a и σ, $\sigma > 0$, если её плотность распределения имеет вид:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{32}$$

Если случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, то будем записывать это в виде $\xi \sim N(a,\sigma)$. Случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение, если $a = 0$ и $\sigma = 1$, $\xi \sim N(0,1)$.

Плотность стандартного нормального распределения имеет вид:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

а его функция распределения $F_\xi(x) = \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа:

$$\Phi_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \tag{33}$$

Функция распределения нормальной величины $\eta \sim N(a, \sigma)$ также выражается через функцию Лапласа:

$$F_\eta(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{34}$$

Задание 1. Вероятность попадания в мишень при каждом из 14 независимых выстрелов равна 0,2. Рассматривается случайная величина X – число попаданий при 14 выстрелах.

1. Постройте многоугольник распределения случайной величины X.
2. Вычислите вероятность 2 попаданий при 14 выстрелах.
3. Постройте ряд распределения случайной величины X.
4. Найдите функцию распределения случайной величины X и постройте её график.
5. Вычислите вероятность того, что при 14 выстрелах мишень будет поражена от 10 до 12 раз.
6. Найдите наивероятнейшее число попаданий и его вероятность.

Решение. 1. Введите исходные данные:

$$n := 14,$$

$$k := [0..n],$$

$$p := 0,2.$$

Вычислите вероятность «непопадания»:

$$q := 1 - p.$$

Вычислите вероятности k попаданий по формуле Бернулли (30), предварительно вычислив по формуле (31) C_n^k:

$$C(n;k) := \frac{n!}{(k!)\cdot(n-k)!},$$

$$P(n;k) := C(n;k)\cdot p^{k}\cdot q^{n-k}.$$

Проверьте равенство $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} P(n;k) = 1$$.

Чтобы построить многоугольник (полигон) распределения случайной величины X – числа попаданий при 14 выстрелах, проделайте следующие действия:

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$.

$$\overrightarrow{P(n;k)} = \begin{bmatrix} 0{,}044 \\ 0{,}1539 \\ 0{,}2501 \\ 0{,}2501 \\ 0{,}172 \\ 0{,}086 \\ 0{,}0322 \\ 0{,}0092 \\ 0{,}002 \\ 0{,}0003 \\ 4{,}1985 \cdot 10^{-5} \\ 3{,}8168 \cdot 10^{-6} \\ 2{,}3855 \cdot 10^{-7} \\ 9{,}175 \cdot 10^{-9} \\ \vdots \end{bmatrix}$$,

$$P(k) := \text{augment}\left(\vec{k};\ \overrightarrow{P(n;k)}\right)$$.

Постройте многоугольник распределения количества попаданий батареи (рисунок 8.1):

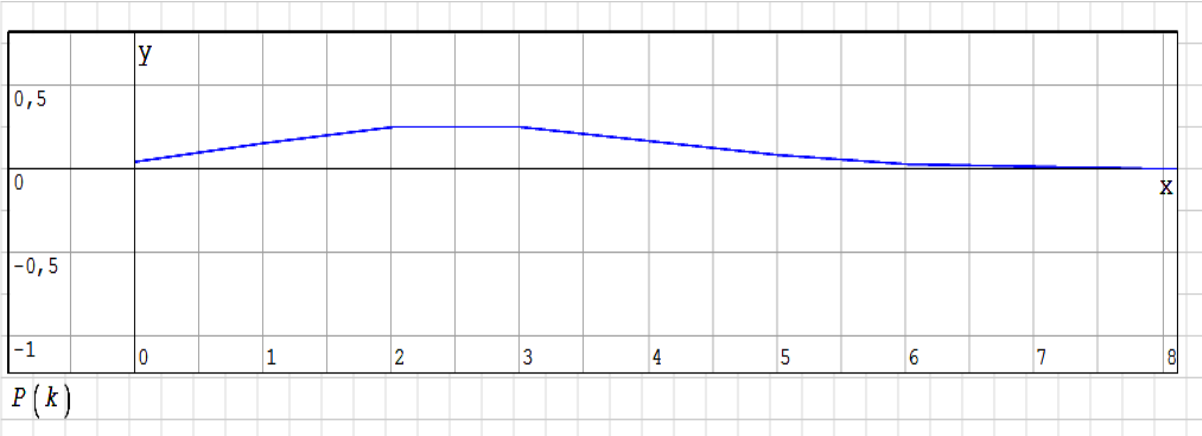


Рисунок 8.1 – Многоугольник распределения

2. Вычислите вероятность 2 попаданий при 14 выстрелах:

$$P(14;2)=0,2501 .$$

3. Постройте ряд распределения случайной величины X – количества попаданий при 14 выстрелах:

$$A := P(k)^{T},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ 0,044 & 0,1539 & 0,2501 & 0,2501 & 0,172 & 0,086 & 0,0322 & \end{bmatrix} .$$

Матрица А и есть ряд или закон распределения дискретной случайной величины.

Замечание: На экране видны не все значения случайной величины. Чтобы увидеть все значения, можно «растянуть» матрицу А, потянув за черный квадратик справа матрицы.

4. Чтобы найти функцию распределения, проделайте следующие действия:

$$i := [1..15] ,$$

$$C_{i\,1} := A_{1\,i} ,$$

$$C_{i\,2} := \sum_{m=1}^{i} A_{2\,m},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0,044 \\ 1 & 0,1979 \\ 2 & 0,4481 \\ 3 & 0,6982 \\ 4 & 0,8702 \\ 5 & 0,9561 \\ 6 & 0,9884 \\ 7 & 0,9976 \\ 8 & 0,9996 \\ 9 & 1 \\ 10 & 1 \\ 11 & 1 \\ 12 & 1 \\ 13 & 1 \\ 14 & 1 \end{bmatrix}.$$

Замечание: Значения с девятого по четырнадцатое на экране округлились до 1. На самом деле единице равно лишь последнее значение. Если увеличить точность ответа (количество чисел после десятичной точки), например, до 10, то получим:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0,0439804651 \\ 1 & 0,197912093 \\ 2 & 0,4480509883 \\ 3 & 0,6981898836 \\ 4 & 0,8701603742 \\ 5 & 0,9561456194 \\ 6 & 0,9883900864 \\ 7 & 0,9976027913 \\ 8 & 0,9996180704 \\ 9 & 0,9999539503 \\ 10 & 0,9999959353 \\ 11 & 0,9999997521 \\ 12 & 0,9999999907 \\ 13 & 0,9999999998 \\ 14 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица C и есть *функция распределения* случайной величины.

Постройте график функции распределения (рисунок 8.2):

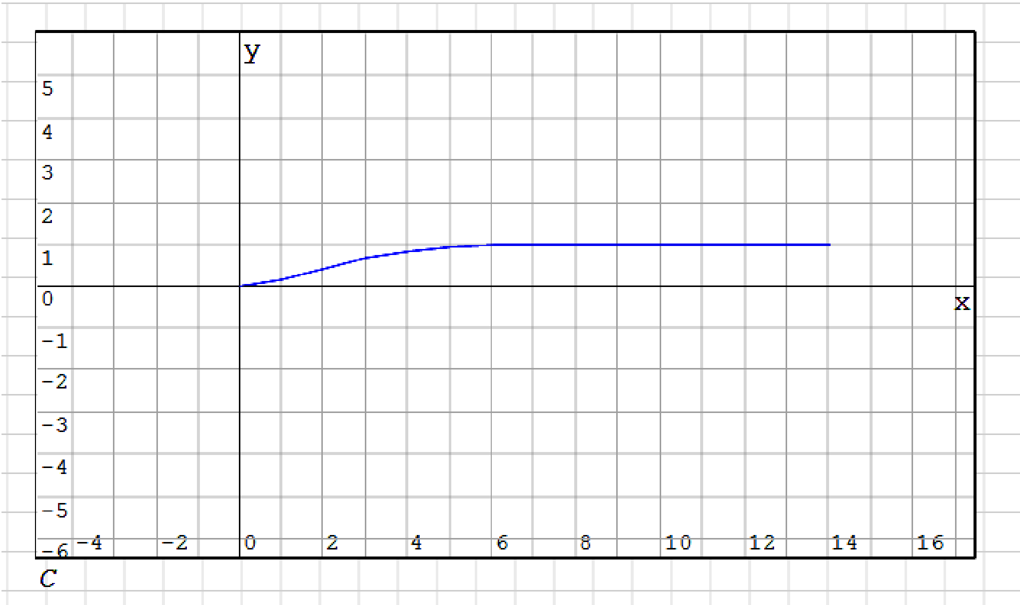


Рисунок 8.2 – График функции распределения

5. Вычислите вероятность того, что при 14 выстрелах мишень будет поражена от 10 до 12 раз:

$$P1 := \sum_{k=10}^{12} P(n; k),$$

$$P1 = 4{,}6 \cdot 10^{-5}.$$

6. Вычислите наивероятнейшее число попаданий:

$$x1 := n \cdot p - q,$$

$$x2 := n \cdot p + p,$$

$$x1 = 2,$$

$$x2 = 3.$$

Следовательно, наивероятнейшие числа попаданий 2 и 3. Их вероятности равны:

$$P(x1) := P(n; x1),$$

$$P(x2) := P(n; x2),$$

$$P(x1) = 0{,}2501,$$

$$P(x2) = 0{,}2501.$$

Задание 2. Диаметр выпускаемой детали – непрерывная случайная величина, подчиненная нормальному закону с параметрами а = 9 см и σ = 0,8 см.

1. Найдите плотность распределения и постройте кривую плотности распределения этой случайной величины.

2. Найдите вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали будет от α = 7 до β = 10 см.

3. Найдите вероятность того, что размер отклонения диаметра наудачу взятой детали от стандартного не превысит числа ε = 0,6 см.

Решение. 1. Задайте параметры случайной величины:

$$a := 9,$$

$$\sigma := 0,8.$$

Плотность распределения непрерывной случайной величины, подчиненной *нормальному закону*, найдите по формуле (32):

$$P\xi(x) := \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right).$$

Постройте кривую плотности распределения данной случайной величины (рисунок 8.3):

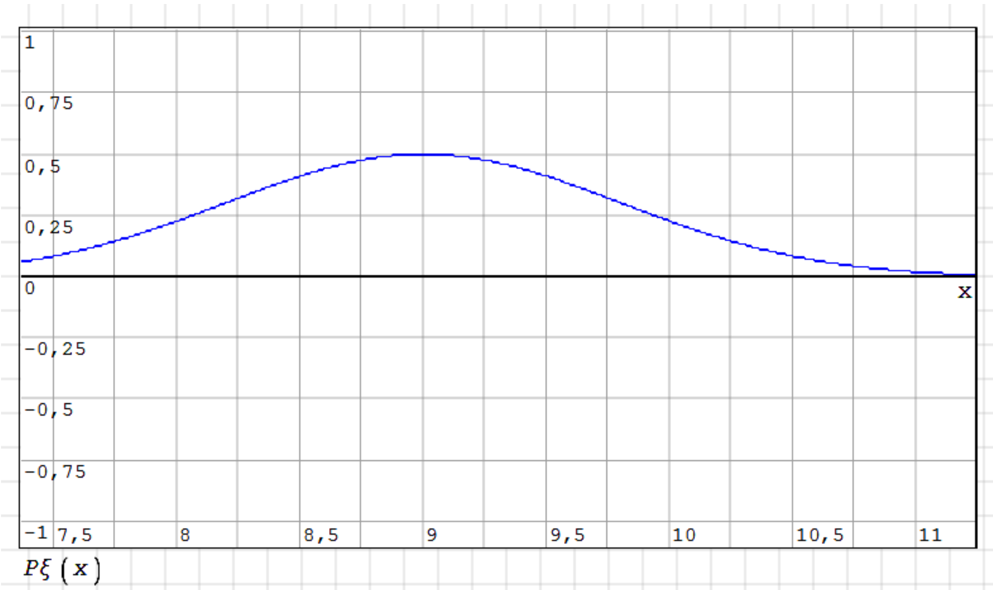


Рисунок 8.3 – График плотности распределения

2. Найдите вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали будет от $\alpha = 7$ до $\beta = 10$ см, используя формулы (29), (33), (34):

$$P(\alpha;\beta) := \phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

$$\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot\int_0^x \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz,$$

$$P(7;10) = 0,8881.$$

3. Найдите вероятность того, что размер отклонения диаметра наудачу взятой детали от стандартного не превысит числа $\varepsilon = 0,6$ см:

$$P(\varepsilon) := 2\cdot\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

$$P(0,6) = 0,5467.$$

2. Числовые характеристики случайных величин

Каждая случайная величина полностью определяется своей функцией распределения. В то же время при решении практических задач достаточно знать несколько числовых параметров, которые позволяют представить основные особенности случайной величины. К таким величинам относятся, в первую очередь, математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Если ξ – *дискретная случайная величина* с распределением

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

то её *математическим ожиданием* называется величина

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{35}$$

Математическое ожидание *непрерывной случайной величины* с плотностью вероятностей $p_\xi(x)$ вычисляется по формуле

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x)dx. \qquad (36)$$

Дисперсия случайной величины характеризует меру разброса значений случайной величины около её математического ожидания. Если случайная величина ξ имеет математическое ожидание $M\xi$, то *дисперсией* случайной величины ξ называется величина

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Дисперсия *дискретной случайной величины* может быть вычислена по формуле

$$D\xi = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M\xi)^2 p_i, \qquad (37)$$

а дисперсия *непрерывной случайной величины* вычисляется по формуле

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - M\xi)p_\xi(x)dx. \qquad (38)$$

Еще одним параметром для определения меры разброса значений случайной величины является *среднеквадратическое отклонение* σ_ξ, связанное с дисперсией соотношением

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}. \qquad (39)$$

Задание 3. Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

ξ	-9	-5	-3	0	1	4	7	10	11
p	0,01	0,06	0,31	0,24	0,08	0,156	0,104	0,01	0,03

1. Постройте многоугольник (полигон) распределения.

2. Найдите функцию распределения и постройте её график.

3. Найдите числовые характеристики данной случайной величины: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

Решение. 1. Задайте дискретную случайную величину в виде матрицы:

$$A := \begin{bmatrix} -9 & -5 & -3 & 0 & 1 & 4 & 7 & 10 & 11 \\ 0,01 & 0,06 & 0,31 & 0,24 & 0,08 & 0,156 & 0,104 & 0,01 & 0,03 \end{bmatrix}.$$

Чтобы построить полигон распределения, найдите плотность распределения:

$$P(k) := A^{T}.$$

Постройте полигон распределения (рисунок 8.4):

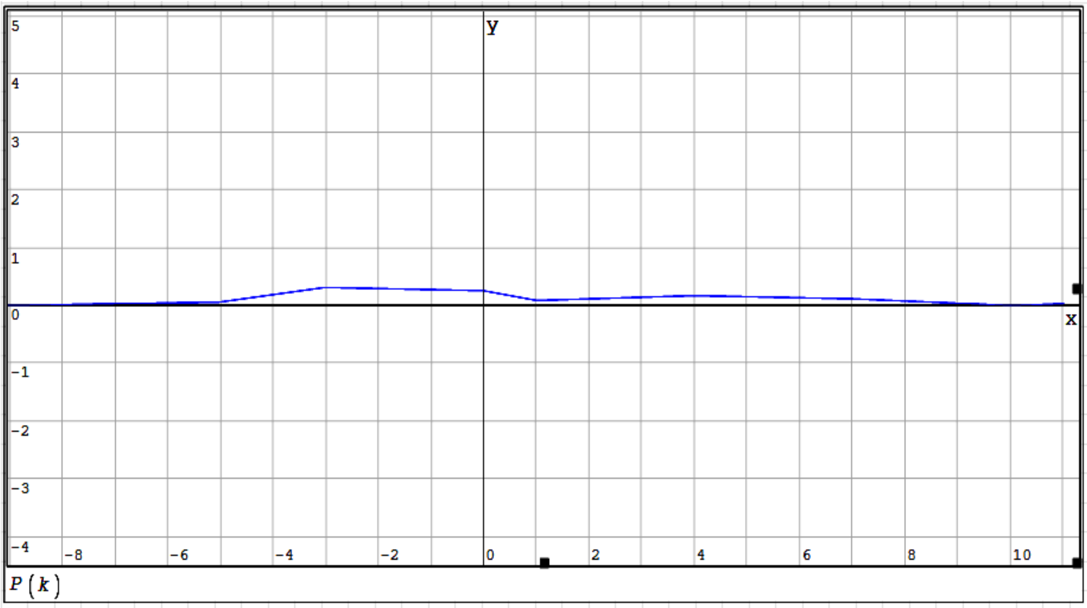


Рисунок 8.4 – Полигон распределения

2. Чтобы найти функцию распределения, выполните следующие действия:

$$i := [1..9],$$

$$C_{i\,1} := A_{1\,i},$$

$$C_{i\,2} := \sum_{m=1}^{i} A_{2\,m}.$$

Полученная матрица C и есть функция распределения заданной случайной величины.

Выведите на экран значения функции распределения:

$$C = \begin{bmatrix} -9 & 0,01 \\ -5 & 0,07 \\ -3 & 0,38 \\ 0 & 0,62 \\ 1 & 0,7 \\ 4 & 0,856 \\ 7 & 0,96 \\ 10 & 0,97 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

Постройте график функции распределения (рисунок 8.5):

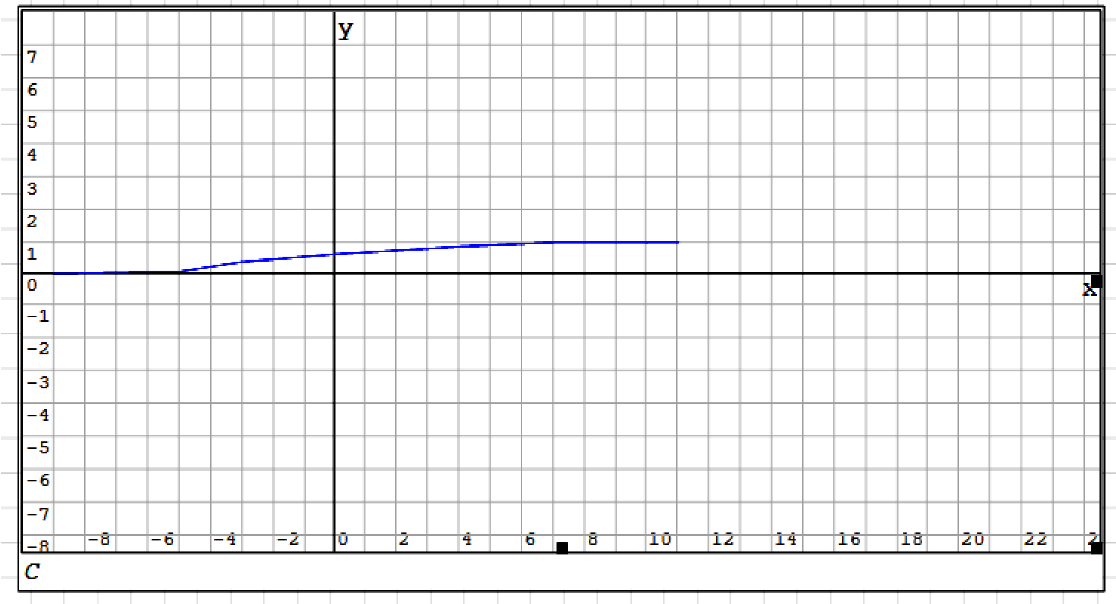


Рисунок 8.5 – График функции распределения

3. Найдите числовые характеристики данной дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, используя формулы (35), (37), (39):

$$M\xi := \sum_{i=1}^{9} A_{1\,i} \cdot A_{2\,i},$$

$$M\xi = 0,542,$$

$$D\xi := \sum_{i=1}^{9} \left(A_{1\,i} - M\xi\right)^2 \cdot A_{2\,i},$$

$$D\xi = 17{,}1082,$$

$$\sigma\xi := \sqrt{D\xi},$$

$$\sigma\xi = 4{,}1362.$$

Таким образом, математическое ожидание равно 0,542, дисперсия 17,1082, среднее квадратическое отклонение 4,1362.

Задание 4. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0 \\ 2x - x^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 1. \\ 1 & \text{при} \quad x > 1 \end{cases}$$

Найдите плотность распределения и числовые характеристики случайной величины.

Решение. 1. Задайте функцию распределения следующим образом:

$$F1(x) := 0,$$

$$F2(x) := 2 \cdot x - x^2,$$

$$F3(x) := 1.$$

2. Найдите плотность распределения, используя формулу (28):

$$f1(x) := \frac{d}{dx} F1(x),$$

$$f2(x) := \frac{d}{dx} F2(x),$$

$$f3(x) := \frac{d}{dx} F3(x).$$

Выведите полученные значения на экран:

$$f1(x) = 0,$$

$$f2(x) = -2 \cdot (-1 + x),$$

$$f3(x) = 0.$$

Таким образом, плотность распределения равна:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \ \ x\le 0\\ 2-2x & при \ \ 0<x\le 1.\\ 0 & при \ \ x>1\end{cases}$$

3. Найдите числовые характеристики непрерывной случайной величины (математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение), используя формулы (36), (38), (39):

$$M\xi := \int_0^1 x\cdot f2(x)\,d\,x,$$

$$D\xi := \int_0^1 (x-M\xi)^2\cdot f2(x)\,d\,x,$$

$$\sigma\xi := \sqrt{D\xi}.$$

Выведите найденные значения на экран:

$$M\xi = 0,3333,$$

$$D\xi = 0,0556,$$

$$\sigma\xi = 0,2357.$$

Таким образом, математическое ожидание равно 0,3333, дисперсия равна 0,0556 и среднеквадратическое отклонение 0,2357.

3. Основы математической статистики

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты.

Исследуемая совокупность объектов называется *генеральной совокупностью.* Совокупность n объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности, называется *выборкой*.

Объёмом совокупности называют число объектов этой совокупности.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объёма n. Допустим, что в результате этой выборки исследуемый признак – случайная величина X – принял m_1 раз значение x_1, m_2 раз значение x_2, …, m_k раз значение x_k так, что

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = \sum_{i=1}^{k} m_i = n \,. \tag{40}$$

Наблюдаемые значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называются *вариантами,* а числа $m_1, m_2, \ldots m_k$ называются *частотами*.

Последовательность значений $x_1, x_2, \ldots, x_k$ случайной величины X, расположенных в порядке возрастания и принимаемых ею в результате выборки объема n с частотами соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_k$, называется *вариационным рядом*.

Относительными частотами вариант называются величины:

$$W_i = \frac{m_i}{n} \,. \tag{41}$$

Статистическим распределением случайной величины X (или *распределением выборки*) называется таблица соответствия вариант и соответствующих им относительных частот. *Статистическое распределение* случайной величины X также называют *эмпирическим* законом распределения.

Форма записи эмпирического закона распределения зависит от характера изучаемой случайной величины X.

а) Пусть X – **дискретная** случайная величина. В этом случае, чтобы составить эмпирический закон распределения, необходимо составить *дискретный вариационный ряд:*

x_1	x_2	…	x_k
m_1	m_2	…	m_k

(42)

Затем нужно найти относительные частоты вариант и полученные значения внести в таблицу:

x_1	x_2	…	x_k
W_1	W_2	…	W_k

(43)

Таблицу (42) называют таблицей *распределения частот*, таблицу (43) называют таблицей *распределения относительных частот*.

б) Пусть X – **непрерывная** случайная величина. В этом случае диапазон измерения величины X разбивают на k частичных интервалов (x_{i-1}, x_i), i=1,...,k. *Количество интервалов* k находят, округляя до целого число

$$k' = 1+3{,}2\cdot \lg n,$$

где n – объём выборки.

Длину каждого интервала h вычисляют (с точностью выборки), округляя в сторону увеличения число:

$$h' = \frac{x_{max} - x_{min}}{k},$$

где x_{max}, x_{min} – соответственно наибольшее и наименьшее значения случайной величины, k – количество интервалов.

Все данные вносят в таблицу:

$(x_0; x_1)$	$(x_1; x_2)$	...	$(x_{k-1}; x_k)$
m_1	m_2	...	m_k

где m_i – количество значений величины X, попадающих в i-тый интервал (частоты).

Эмпирический закон распределения непрерывной случайной величины записывают в виде:

$(x_0; x_1)$	$(x_1; x_2)$	...	$(x_{k-1}; x_k)$
$\widetilde{W}_1$	$\widetilde{W}_2$	...	$\widetilde{W}_k$

,

где $\widetilde{W}_i$ – относительная частота попадания значений величины X в i-тый интервал, то есть $\widetilde{W}_i = \dfrac{m_i}{n}$.

Задание 5. Дискретная случайная величина X задана *вариационным рядом:*

X	0	2	5	8	12	14
m	3	6	14	19	7	1

Постройте полигон частот и полигон относительных частот.

Решение. 1. Введите значения случайной величины X (варианты):

$$X_1 := 0$$
$$X_2 := 2$$
$$X_3 := 5$$
$$X_4 := 8$$
$$X_5 := 12$$
$$X_6 := 14.$$

2. Введите их частоты m_i:

$$m_1 := 3$$
$$m_2 := 6$$
$$m_3 := 14$$
$$m_4 := 19$$
$$m_5 := 7$$
$$m_6 := 1.$$

Замечание: Варианты и их частоты можно также вводить в виде матриц, размера (1×6).

3. Вычислите объем выборки по формуле (40):

$$n := \sum_{i=1}^{6} m_i.$$

Выведите полученное значение на экран:

$$n = 50.$$

4. Найдите относительные частоты по формуле (41):

$$i := [1..6],$$

$$W_i := \frac{m_i}{n}.$$

5. Выведите на экран векторы значений вариант, их частот и относительных частот:

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix},$$

$$m = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 14 \\ 19 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} 0{,}06 \\ 0{,}12 \\ 0{,}28 \\ 0{,}38 \\ 0{,}14 \\ 0{,}02 \end{bmatrix}.$$

6. Чтобы построить полигон частот, объедините векторы X и m в матрицу A с помощью команды:

$$A := \mathrm{augment}(X; m).$$

Аналогично, чтобы построить полигон относительных частот, объедините векторы X и m в матрицу B с помощью команды:

$$B := \mathrm{augment}(X; W).$$

Постройте полигон частот (рисунок 8.6):

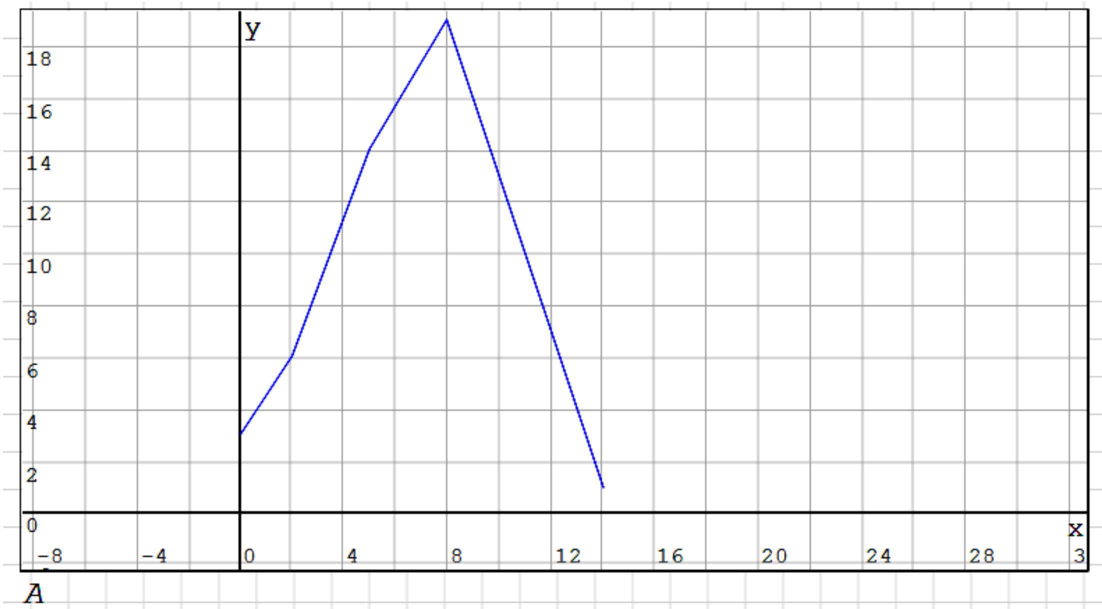


Рисунок 8.6 – Полигон частот

Постройте полигон относительных частот:

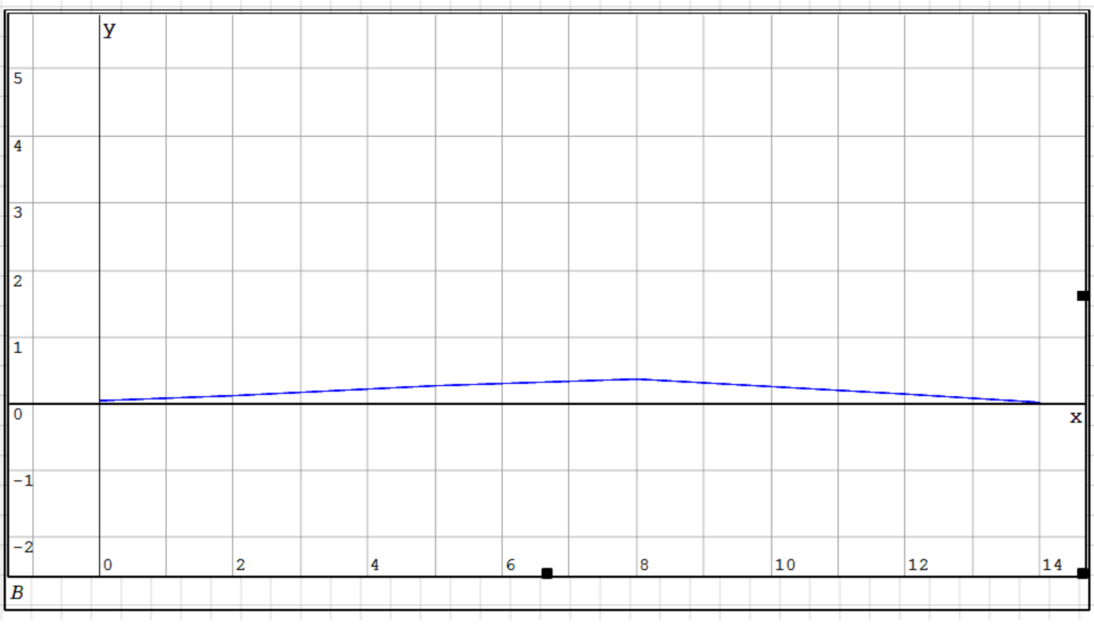


Рисунок 8.7 – Полигон относительных частот

4. Статистические оценки параметров распределения

Статистическая оценка называется *несмещённой*, если её математическое ожидание равно оцениваемому параметру. *Смещённой* называют статистическую оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

а) Пусть **дискретная** случайная величина X задана вариационным рядом:

x_1	x_2	….	$x_к$
m_1	m_2	….	n_k

,

где

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

Выборочной средней называется среднее арифметическое всех полученных значений случайной величины, принимаемых в выборке:

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i. \tag{44}$$

Если все значения x_1, x_2, …, x_n случайной величины X в выборке объёма n различны, то m_i=1, i=1,...,n. В этом случае выборочная средняя вычисляется по формуле

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Выборочная средняя является *несмещённой* оценкой математического ожидания случайной величины X.

Выборочной дисперсией называется число

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \overline{x}_в)^2. \tag{45}$$

Если все значения x_1, x_2, …, x_n случайной величины X различны, то выборочная дисперсия вычисляется по формуле

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_в)^2. \tag{46}$$

Замечание. Из формулы (46) можно получить формулу

$$D_в = \overline{x^2} - \left(\overline{x}_в\right)^2,$$

где

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i^2.$$

Выборочная дисперсия является *смещённой* оценкой дисперсии D случайной величины X, так как

$$\mathrm{M}\left[D_в\right] = \frac{n-1}{n} D.$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называется число

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}\,.$$

Из формулы (59) следует, что *несмещённой* оценкой дисперсии служит «исправленная дисперсия».

Исправленной (несмещенной) дисперсией называется число

$$\mathrm{s}^2 = \frac{n}{n-1} D_в. \tag{47}$$

Исправленным средним квадратическим отклонением называется число

$$\mathrm{s} = \sqrt{\mathrm{s}^2}\,. \tag{48}$$

б) Пусть X – **непрерывная** случайная величина, задана интервальным вариационным рядом:

$(x_0; x_1)$	$(x_1; x_2)$	...	$(x_{k-1}; x_k)$
m_1	m_2	...	m_k

.

Для оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения применяются те же формулы (44)–(48).

За значения $x_1,\ldots, x_k$ в этих формулах берут середины интервалов $(x_0; x_1)$, $(x_1; x_2)$, …. , $(x_{k-1}; x_k)$, то есть вместо $x_1,..., x_k$ в формулы (44)–(48) подставляют соответственно числа x_1^*, x_2^*, …, x_k^*, где:

$$x_1^* = \frac{x_0 + x_1}{2},$$

$$x_2^* = \frac{x_1 + x_2}{2}, \tag{49}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$x_k^* = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$

Другими словами, в качестве «представителя» варианты интервала выбирается центр x_i^* этого интервала и интервальный вариационный ряд заменяется дискретным рядом:

x_1^*	x_2^*	…	x_k^*
m_1	m_2	…	m_k

. (50)

Задание 6. Дискретная случайная величина X задана *вариационным рядом:*

X	45	50	55	60	65	70	75
m	4	6	10	40	20	12	8

Найдите несмещенные точечные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.

Решение. 1. Введите значения случайной величины X (варианты):

$$X := \begin{bmatrix} 45 \\ 50 \\ 55 \\ 60 \\ 65 \\ 70 \\ 75 \end{bmatrix}.$$

2. Введите их частоты m_i:

$$m := \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \\ 40 \\ 20 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислите объем выборки по формуле (40):

$$n := \sum_{i=1}^{6} m_i.$$

Выведите полученное значение на экран:

$$n = 92.$$

4. Найдите несмещенную оценку математического ожидания по формуле (44):

$$X_B := \frac{1}{n} \cdot X \cdot m$$.

Выведите полученное значение на экран:

$$X_B = 67{,}0652$$.

5. Найдите выборочную дисперсию по формуле (46):

$$D_B := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{6} \left(X_i - X_B \right)^2$$.

Найдите несмещенную оценку дисперсии по формуле (47):

$$S2 := \frac{n}{n-1} \cdot D_B$$.

Выведите полученное значение на экран:

$$S2 = 10{,}8402$$.

6. Найдите несмещенное среднее квадратическое отклонение по формуле (48):

$$s := \sqrt{S2}$$.

Выведите полученное значение на экран:

$$s = 3{,}2924$$.

Задание 7. При измерении длины 50 колосьев некоторого сорта ячменя получены следующие данные:

Длина колосьев, см	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18
Частота	6	12	17	10	4	1

Найдите несмещенные точечные оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения признака X – длины колосьев в генеральной совокупности.

Решение. 1. Случайная величина задана интервальным вариационным рядом. Чтобы найти оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения, перейдите к дискретному ряду (50). Для этого найдите середины интервалов, используя формулы (49):

$$X_1 := \frac{(6+8)}{2},$$

$$\mathrm{i} := [2..6],$$

$$X_\mathrm{i} := X_{\mathrm{i}-1} + 2.$$

Выведите полученное значение на экран:

$$X = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \\ 13 \\ 15 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

2. Введите частоты:

$$m_1 := 6,$$

$$m_2 := 12,$$

$$m_3 := 17,$$

$$m_4 := 10,$$

$$m_5 := 4,$$

$$m_6 := 1.$$

Вычислите объем выборки по формуле (40):

$$n := \sum_{\mathrm{i}=1}^{6} m_\mathrm{i}.$$

Выведите полученное значение на экран:

$$n := 50$$.

3. Найдите несмещенную оценку математического ожидания по формуле (44):

$$X_В := \frac{1}{n} \cdot X \cdot m$$.

Выведите полученное значение на экран:

$$X_В = 10,88$$.

5. Найдите выборочную дисперсию по формуле (46):

$$D_В := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{6} \left(X_i - X_В \right)^2$$.

Найдите несмещенную оценку дисперсии по формуле (47):

$$S2 := \frac{n}{n-1} \cdot D_В$$.

Выведите полученное значение на экран:

$$S2 = 1,5822$$.

6. Найдите несмещенное среднее квадратическое отклонение по формуле (48):

$$s := \sqrt{S2}$$.

Выведите полученное значение на экран:

$$s = 1,2578$$.

Контрольные вопросы

1. Как построить ряд распределения дискретной случайной величины в SMathStudio?
2. Как в SMathStudio найти функцию распределения случайной величины?
3. Как найти функцию плотности распределения непрерывной случайной величины в SMathStudio?
4. Как в SMathStudio построить многоугольник распределения случайной величины?
5. Как в SMathStudio вычислить вероятность того, что значение случайной величины попадет в заданный интервал?
6. Как в SMathStudio вычислить вероятность числа появлений события в n независимых испытаниях?
7. Как найти числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение в SMathStudio?
8. Как в SMathStudio найти числовые характеристики непрерывной случайной величины?
9. Как выглядит дискретный вариационный ряд в SMathStudio?
10. Как в SMathStudio вычислить выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную (несмещенную) дисперсии, исправленное среднее квадратическое отклонение?

ЛИТЕРАТУРА

1. Шипачев, В.С. Высшая математика: учебник для вузов / В.С. Шипачев. – 8-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2019. – 447 с.
2. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. – 12-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2020. – 480 с.
3. Шаповалова, Л.Н. Математика в MathCad: учебное пособие / Л.Н. Шаповалова, Н.М. Удинцова, А.Ю. Медведько. – Зерноград: АЧГАА, 2013. – 163 с.
4. Удинцова, Н.М. Математическая статистика: учебное пособие / Н.М. Удинцова, Л.Н. Шаповалова. – Зерноград: АЧГАА, 2011. – 100 с.

Учебное издание

Удинцова Надежда Михайловна

Середина Марина Николаевна

Серёгина Виктория Викторовна

Степовой Дмитрий Владимирович

Математика в SMathStudio

Учебное пособие

Редактор Лучинкина Н.П.
Верстка Гвоздик Н.В.
Дизайн обложки Вдовикина С.П.

Подписано в печать 27.05.2022 г.
Формат 60×84/16. Усл. п.л. 11,1. Тираж 500 экз. Заказ № 29.

Отдел информационных технологий и издательской деятельности
Азово-Черноморского инженерного института
ФГБОУ ВО Донской ГАУ
347740, г. Зерноград Ростовской области, ул. Советская, 15.