

Combinatorial utilities - Applications

- ☒ Combinatorial
- ☐ Problemas

In how many ways can 3 people sit in 8 chairs so that there are no two consecutive people?

$n := 8$ $r := 3$

$$P := \left\{ x \in CPerms(n, r) \left| \left(\prod_{k=1}^{r-1} x_{k+1} > x_k + 1 \cdot \prod_{k=1}^{r-1} x_{k+1} > x_k \right) = 1 \right. \right\} \quad \begin{matrix} |P| = 20 \\ C(n-r+1, r) = 20 \end{matrix}$$

$$P^T = \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \end{matrix} \right]$$

What if the chairs are at a round table?

$$Q := \left\{ x \in P \left| \begin{cases} x_r < n & \text{if } x_1 = 1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \right. \right\} \quad \begin{matrix} |Q| = 16 \\ C(n-r+1, r) - C(n-r-1, r-2) = 16 \end{matrix}$$

$$Q^T = \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \end{matrix} \right]$$

Find all natural solutions of $a + b + c = 6$. This problem is equivalent to finding how to put 6 objects in 3 boxes.

$n := 6$ $r := 3$

$$S_0 := C(\text{"PR"}, [0..n], r) = \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} & \dots \end{matrix} \right] \quad |S_0| = 343$$

$$P_0 := \left\{ x \in S_0 \left| \sum_{k=1}^r x_k = n \right. \right\} \quad \begin{matrix} |P_0| = 28 \\ C(n+r-1, r-1) = 28 \end{matrix}$$

$$P_0^T = \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} & \dots \end{matrix} \right]$$

Find the positive solutions to the previous problem. This is equivalent to not leaving any boxes empty.

$$P := \left\{ x \in CPerms(n-r+1, r) \left| \sum_{k=1}^r x_k = n \right. \right\} \quad \begin{matrix} |P| = 10 \\ C(n-r+r-1, r-1) = 10 \end{matrix}$$

$$P^T = \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \right] \quad \text{or} \quad \left| \left\{ x \in P_0 \left| \prod_{k=1}^r x_k \neq 0 \right. \right\} \right| = 10$$

Now, leave at least one box empty.

$$P := \left\{ x \in S_0 \left| \left(\sum_{k=1}^r x_k = n \right) \wedge \left(\prod_{k=1}^r x_k = 0 \right) \right. \right\} \quad |P| = 18$$

$$P^T = \left[\begin{matrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} & \dots \end{matrix} \right] \quad \text{or} \quad \left| \left\{ x \in P_0 \left| \prod_{k=1}^r x_k = 0 \right. \right\} \right| = 18$$

